

共鳴トンネル効果に対する散乱の影響

メタデータ	言語: jpn 出版者: 明治大学教養論集刊行会 公開日: 2009-04-15 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 中村, 孔一 メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/10291/5021

共鳴トンネル効果に対する散乱の影響

中 村 孔 一

1. はじめに

ポテンシャル障壁を粒子が通り抜けるトンネル現象は量子力学に特有の効果として、古くからよく知られているが、最近になって、この現象を利用した電子素子の開発が進み、実用的な意味からも、多くの人々の関心を集めるようになった。

特に、Esaki による共鳴トンネルトランジスターの提案は、二重障壁構造による共鳴トンネル現象についての多くの研究を誘発した。こうした研究のテーマの一つに、障壁にはさまれた領域での粒子の散乱が共鳴トンネル現象にどのような影響を与えるかという問題がある。

現実の超格子構造では内部に不純物やフォノンのような散乱中心が存在し、透過粒子はそれらによって散乱される可能性がある。この散乱は共鳴状態に影響を及ぼし、トンネル電流を変化させる。この影響を調べることは、物理学としても応用上からも興味ふかい。

この小論では、厳密に解ける簡単なモデルによって、この問題を考察する。

第2節では、後の議論の準備もかねて、二重の矩形ポテンシャル障壁による共鳴トンネル現象を議論する。次の節では、障壁の間に散乱中心がランダムに分布している系をシミュレートするモデルを作り、散乱の影響を取り入れた透過率を求める。最後の節では、入射粒子の運動量の関数として、求めた透過率

を図示し、散乱の影響を具体的に示す。特に、透過率に現われる共鳴ピークの位置や形が散乱の影響によってどのように変わるかを詳しく議論する。

2. 二重障壁トンネル現象

二重障壁のトンネル現象を議論する前に、後の議論で用いるパラメータの説明もかねて、一つの矩形ポテンシャル障壁のトンネル現象について簡単にふれることにする。

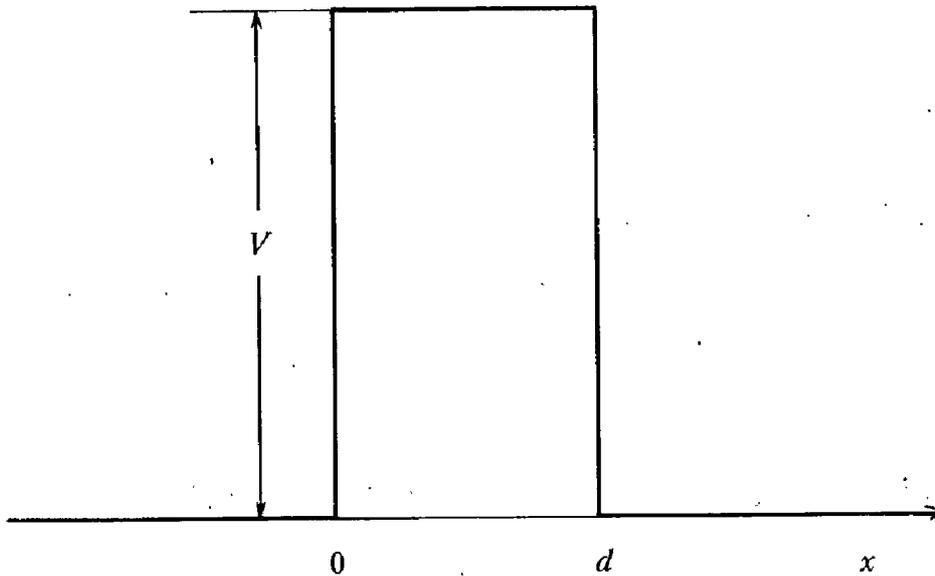


図-1 矩形ポテンシャル障壁。

図1のような矩形ポテンシャル障壁を考え、運動エネルギーが $E = k^2/2m$ である粒子 (m は粒子の質量) が左から飛んできたとする。 E がポテンシャル障壁の高さ V よりも小さければ、古典力学では粒子は障壁を通り抜けることはできず、 $x > d$ の領域に粒子が達することはない。しかし、量子力学では、 $x > d$ の領域にも粒子の波動関数は浸み出して行き、この領域に粒子を見出す確率はゼロではなくなる。

障壁の両側、領域 $x < 0$ と $x > d$ では、粒子の波動関数の従う Schrödinger 方程式は、共に次のようになる (以下では、 $\hbar = 1$ 、 $2m = 1$ となる単位系をとることにする)：

$$-\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) = k^2\Psi(x) \quad (1)$$

したがって、解 $\Psi(x)$ は一般に

$$\Psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & x \leq 0 \\ Ce^{ik(x-d)} + De^{-ik(x-d)} & x \geq d \end{cases} \quad (2)$$

と書ける。

領域 $0 < x < d$ では、波動関数は

$$\Psi(x) = Fe^{\kappa x} + Ge^{-\kappa x} \quad (3)$$

となる。ただし、

$$\kappa = \begin{cases} \sqrt{V - k^2} & V > k^2, \\ i\sqrt{k^2 - V} & V \leq k^2. \end{cases} \quad (4)$$

障壁の境界 $x=0$ と $x=d$ で、波動関数 $\Psi(x)$ とその一階導関数 $d\Psi(x)/dx$ が連続であるという条件から、(2), (3)に現われる積分定数の間に線型な関係が得られる。

$x=0$ での連続条件より

$$\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = K(k; V) \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \quad (5)$$

が得られる。ただし、

$$K(k; V) = \frac{1}{2\kappa} \begin{pmatrix} \kappa + ik & \kappa - ik \\ \kappa - ik & \kappa + ik \end{pmatrix} \quad (6)$$

同じように、 $x=d$ での連続条件から、

$$\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = K^{-1}(k; V) \begin{pmatrix} e^{\kappa d} & 0 \\ 0 & e^{-\kappa d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} \quad (7)$$

が得られる。式(5)を(7)に代入すれば、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} &= K^{-1}(k; V) \begin{pmatrix} e^{xd} & 0 \\ 0 & e^{-xd} \end{pmatrix} K(k; V) \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \\ &\equiv M(k; V, d) \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (8)$$

式(8)を使って、 M の行列要素を具体的に求めると、

$$M(k; V, d) = \begin{pmatrix} \lambda & -i\mu \\ i\mu & \lambda \end{pmatrix} \quad (9)$$

と書ける。ただし

$$\lambda = \frac{1}{4ik\kappa} \{ e^{xd} (\kappa + ik)^2 - e^{-xd} (\kappa - ik)^2 \}, \quad (10)$$

$$\mu = \frac{V}{4k\kappa} (e^{xd} - e^{-xd}). \quad (11)$$

$|\lambda|^2 - \mu^2 = 1$ が成り立つことに注意して、次のようなパラメータ

$$r = \mu / \sqrt{1 + \mu^2}, \quad \phi = \arg \lambda \quad (12)$$

を導入すると、(9)は

$$M(k; V, d) = \frac{1}{\sqrt{1 - r^2}} \begin{pmatrix} e^{i\phi} & -ir \\ ir & e^{-i\phi} \end{pmatrix} \quad (13)$$

と書き換えられる。

パラメータ r と ϕ は次のような物理的意味をもっている。 $A=1, D=0$ とし、式(8)を B, C について解くと

$$B = r e^{i(\phi - \pi/2)}, \quad C = \sqrt{1 - r^2} e^{i\phi}. \quad (14)$$

この解は、次のように解釈できる。運動エネルギー $E = k^2$ で左から飛んできた粒子を表わす平面波 e^{ikx} が、一部はポテンシャル障壁によって反射されて平面波 Be^{-ikx} となり、残りが障壁を通り抜けて平面波 $Ce^{ik(x-d)}$ となって右側の領域を伝搬していく。式(14)は反射波の強さが $|B|^2 = r^2$ 、透過波の強さが

$|C|^2 = 1 - r^2$ であることを表わしている。すなわち、 r^2 は反射率を表わし、 ϕ は障壁を通り抜ける際の位相のずれ(phase shift)を表わしている。式(11), (12)より、 $k \neq 0$ ならば $r < 1$ であり、透過波の強さはゼロではない。すなわち、 $k^2 < V$ であっても、 $x > d$ の領域に粒子を見出す確率はゼロでないことになる。これがトンネル現象である。

そこで、図-2のような二重障壁によるトンネル現象を考えてみよう。

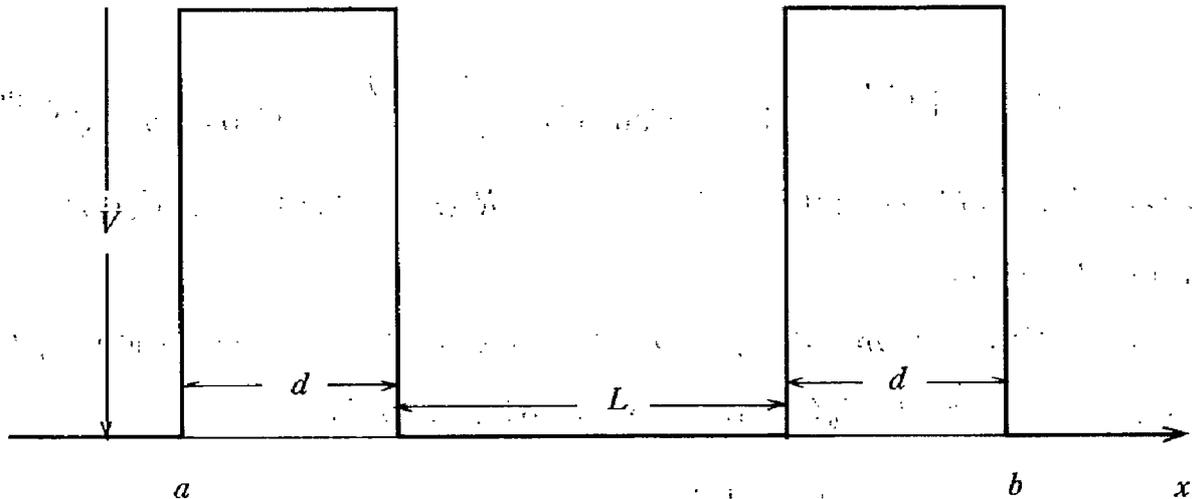


図-2 二重障壁。

$x \leq a$ での波動関数を

$$\Psi(x) = Ae^{ik(x-a)} + Be^{-ik(x-a)}$$

とし、 $x \geq b$ での波動関数を

$$\Psi(x) = Ce^{ik(x-b)} + De^{-ik(x-b)}$$

とすると、係数 A, B, C, D の間に

$$\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = M(k; V, d) \begin{pmatrix} e^{ikL} & 0 \\ 0 & e^{-ikL} \end{pmatrix} M(k; V, d) \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \quad (15)$$

という関係式が成り立つことは、一重障壁の場合の式(8)から明らかであろう。

前の場合と同じように、 $A=1, D=0$ として、 B, C について(15)を解くと、

$$B = \frac{2r \cos(kL + \phi)}{(1 - r^2) \sin(kL + \phi) + i(1 + r^2) \cos(kL + \phi)} e^{i\phi}, \quad (16)$$

$$C = \frac{i(1 - r^2)}{(1 - r^2) \sin(kL + \phi) + i(1 + r^2) \cos(kL + \phi)} e^{i\phi}, \quad (17)$$

となる。したがって、反射率 $R_0(k)$ と透過率 $T_0(k)$ は、それぞれ

$$R_0(k) = |B|^2 = \frac{4r^2 \cos^2(kL + \phi)}{(1 - r^2)^2 \sin^2(kL + \phi) + (1 + r^2)^2 \cos^2(kL + \phi)} \quad (18)$$

$$T_0(k) = |C|^2 = \frac{(1 - r^2)^2}{(1 - r^2)^2 \sin^2(kL + \phi) + (1 + r^2)^2 \cos^2(kL + \phi)} \quad (19)$$

となる。粒子の流れの保存則、すなわち、等式 $R_0(k) + T_0(k) = 1$ が成り立つことは直ちにわかる。

r が 1 に近い、いいかえると、一つの障壁の透過率が小さければ、(19)の分子は小さくなり、一般には $T_0(k)$ も小さい。しかし、その場合でも

$$k_R L + \phi(k_R) = \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \quad (n = \text{整数}) \quad (20)$$

をみたす k の値、 $k = k_R$ では、 $T_0(k_R) = 1$ となり完全な透過がおこる。これが共鳴トンネル効果とよばれる現象である。

共鳴点の近くでの透過率 $T_0(k)$ のふるまいを見てみよう。 r や ϕ の k 依存性は弱い(正確には $dr/dk \ll L$, $d\phi/dk \ll L$)として、式(19)の r と ϕ を $k = k_R$ での値 $r(k_R)$ と $\phi(k_R)$ で置きかえ、分母を $(k - k_R)$ で展開して高次の項を捨てると

$$T_0(k) = \frac{(\Gamma/2)^2}{(k - k_R)^2 + (\Gamma/2)^2} \quad (21)$$

となる。ただし、

$$\Gamma = \frac{1 - r^2(k_R)}{r(k_R) L} \quad (22)$$

透過率 $T_0(k)$ は共鳴点 $k = k_R$ の近くで、式(22)の Γ を半値巾とする Lorentz 型

のピークをもつことがわかる。巾 Γ は、 $r(k_R)$ が小さくなれば大きくなるから、 k_R の大きなピークほど巾が広くなる。

この節を終る前に、 $VL^2=100$, $d/L=0.1$ として式(19)の右辺を数値的に求めた

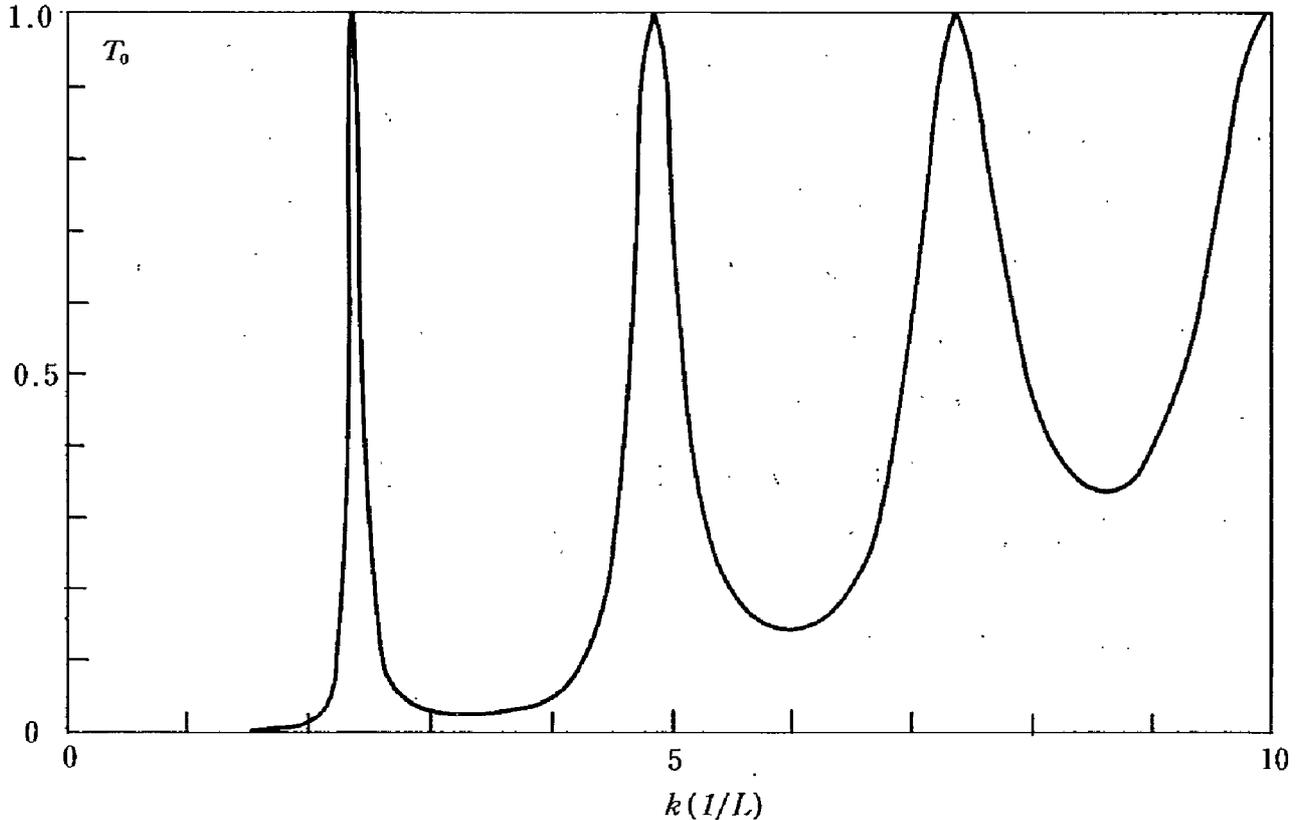


図-3 k の関数として表わされた T_0 . パラメータの値は、 $VL^2=100$, $d/L=0.1$ とした。横軸の目盛りは、 $1/L$ を単位として測った k の値。

グラフを図-3に示す。図を見ると、最初のピーク(式(20)で $n=0$ としたものに
対応する)は、中心が $k \cong 2.5/L$ にあり、巾は $\Gamma \cong 0.2/L$ である。一方、 $k=2.5/L$
での ϕ と r を計算すると $\phi(2.5/L) = -0.93$, $r(2.5/L) = 0.92$ となり確かに、
式(20), (22)をみたしていることがわかる。

3. 散乱の影響

現実のデバイスでは、障壁にはさまれた領域に、不純物やフォノンなどの散
乱中心が存在し、通り抜ける粒子を散乱する。この散乱が、前節で述べた二重
障害による反射率や透過率をどう変えるかは興味のある問題である。特に、透

過率に現われる共鳴ピークの位置や形がどのように変わるかは、デバイスとしての応用の上からも重要な問題である。

ここでは、この問題を、以下に述べるような簡単なモデルを使って調べてみよう。

まず、前節と同じ矩形型の二重ポテンシャル障壁を考える。そして、障壁にはさまれた領域の中に、もう一つの矩形型ポテンシャル(これを以下では散乱ポテンシャルと呼ぶことにする)を考え、この系での透過率を計算する。次に、現実の系では散乱中心がランダムに分布していることをモデル化するために、得られた透過率を散乱ポテンシャルの位置について平均する。その結果、式(19)で表わされる透過率 T_0 がどう変わるかを見てみよう。図-4のような三重障壁ポテンシャルを考える。 V' および d' は散乱ポテンシャルの大きさと巾である。 $x < a$ および $x > b$ の領域での波動関数を、それぞれ

$$\Psi(x) = Ae^{ik(x-a)} + Be^{-ik(x-a)} \quad x < a$$

$$\Psi(x) = Ce^{ik(x-b)} + De^{-ik(x-b)} \quad x > b$$

とすると、係数の間に式(15)と類似の関係式

$$\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = M(k; V, d) \begin{pmatrix} e^{ikl} & 0 \\ 0 & e^{-ikl} \end{pmatrix} M(k; V', d') \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \quad (23)$$

が成り立つ。そこで、前の場合と同じように、 $A=1$ 、 $D=0$ として、式(23)を B 、 C について解くと

$$B = \frac{2r \cos \Theta + \rho(1+r^2) \cos \theta - i\rho(1-r^2) \sin \theta}{(1-r^2) \sin \Theta + i(1+r^2) \cos \Theta + 2ipr \cos \theta} e^{i\phi}, \quad (24)$$

$$C = \frac{i(1-r^2) \sqrt{1-\rho^2}}{(1-r^2) \sin \Theta + i(1+r^2) \cos \Theta + 2ipr \cos \theta} e^{i\phi}. \quad (25)$$

ただし,

$$\Theta = kL + \phi + \psi,$$

$$\theta = kL - 2kl.$$

ここで, ρ と ψ は式(23)の右辺の因子 $M(k; V', d')$ から現われるパラメータで, 散乱ポテンシャルのパラメータ V' と d' を用いて得られる r と ϕ の対応物である. したがって, 式(4), (10), (11), (12)で, V と d を V' と d' に置きかえれば, r と ϕ に対応してそれぞれ ρ と ψ が求まる.

$V' = 0$ とすると, $\kappa' = ik$ となり, (10), (11), (12)より, $\rho = 0$, $\psi = kd'$. 当然だが, このときには, 式(24), (25)は(16), (17)に(正確には, (16), (17)で L を $L + d'$ に置きかえたものに)一致する.

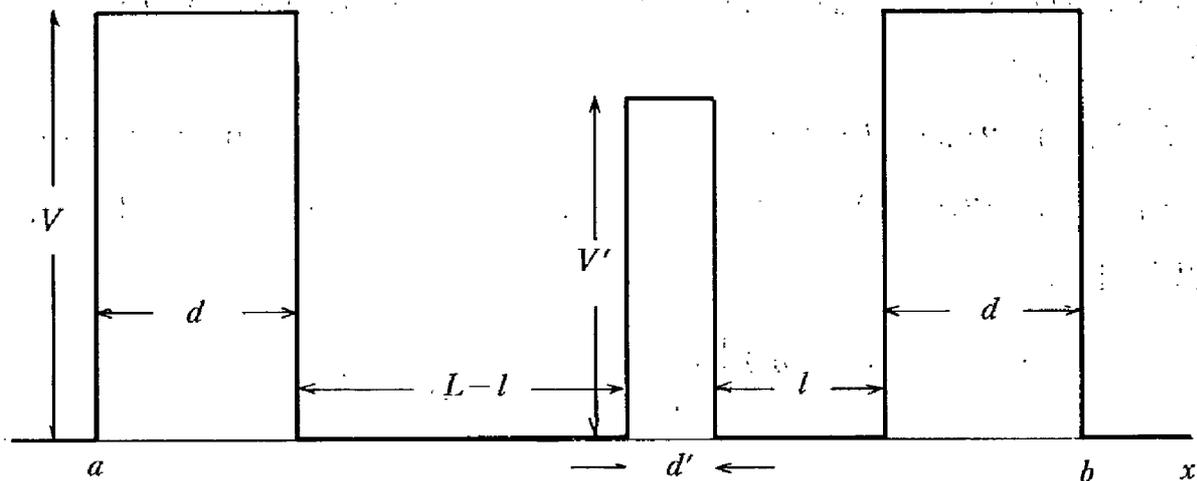


図-4 二重障壁と散乱ポテンシャル.

図-4で示されるような三重障壁による反射率 R と透過率 T は, 式(24), (25)より

$$R = \frac{\{2r\cos\Theta + \rho(1+r^2)\cos\theta\}^2 + \rho^2(1-r^2)^2\sin^2\theta}{(1-r^2)^2\sin^2\Theta + \{(1+r^2)\cos\Theta + 2r\rho\cos\theta\}^2}, \quad (26)$$

$$T = \frac{(1-r^2)^2(1-\rho^2)}{(1-r^2)^2\sin^2\Theta + \{(1+r^2)\cos\Theta + 2r\rho\cos\theta\}^2}, \quad (27)$$

と書ける.

そこで, この節の初めの部分に述べたように, 散乱ポテンシャルの位置を指

示すパラメータ l について、この T を平均した

$$\hat{T} = \frac{1}{L} \int_0^L T dl \quad (28)$$

を考え、これがランダムに分布した散乱中心の効果を取り入れた透過率だと考えることにする。現実の系を、さまざまな l の値に対応した散乱ポテンシャルをもつ一次元三重障壁が並列に並んだ系でシミュレートしようというわけである。

式(27)により、透過率 T は $\cos\theta$ の2次式の逆数であるから、積分変数を l から $\tan(\theta/2)$ に変えれば、積分(28)は有理式の積分となって解析的に実行できる。計算はやや繁雑であるが初等的であるので途中は省略して結果だけを書くことにする。

結果 \hat{T} の表式は、 k の値が次の二つの場合のどちらであるかによって、異なった形をとる：

$$\text{場合(i)} \quad 2n\pi \leq kL \leq (2n+1)\pi \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\text{場合(ii)} \quad (2n+1)\pi \leq kL \leq (2n+2)\pi \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

場合(i)では

$$\begin{aligned} \hat{T} = & \frac{(1-r^2)^2(1-\rho^2)}{kL} \left[\frac{\alpha+\gamma}{\alpha\gamma} \frac{1}{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}} \left\{ 2n\pi \right. \right. \\ & \left. \left. + \arctan \frac{2\alpha U + \beta}{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}} + \arctan \frac{2\alpha U - \beta}{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}} \right\} \right. \\ & \left. + \frac{\alpha-\gamma}{2\alpha\beta\gamma} \log \frac{\alpha U^2 + \beta U + \gamma}{\alpha U^2 - \beta U + \gamma} \right] \quad (29) \end{aligned}$$

場合(ii)では

$$\begin{aligned} \hat{T} = & \frac{(1-r^2)^2(1-\rho^2)}{kL} \left[\frac{\alpha+\gamma}{\alpha\gamma} \frac{1}{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}} \left\{ (2n+1)\pi \right. \right. \\ & \left. \left. + \arctan \frac{2\gamma U + \beta}{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}} + \arctan \frac{2\gamma U - \beta}{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}} \right\} \right] \end{aligned}$$

$$+ \frac{\gamma - \alpha}{2\alpha\beta\gamma} \log \frac{\gamma U^2 + \beta U + \alpha}{\gamma U^2 - \beta U + \alpha} \quad (30)$$

ただし,

$$\alpha = \sqrt{\{(1+r^2)\cos\Theta - 2r\rho\}^2 + (1-r^2)^2\sin^2\Theta}, \quad (31)$$

$$\gamma = \sqrt{\{(1+r^2)\cos\Theta + 2r\rho\}^2 + (1-r^2)^2\sin^2\Theta}, \quad (32)$$

$$\beta = \sqrt{2\alpha\gamma - 2\{(1+r^2)^2\cos^2\Theta + (1-r^2)^2\sin^2\Theta - 4r^2\rho^2\}}, \quad (33)$$

$$U = \begin{cases} \tan \frac{kL - 2n\pi}{2} & \text{場合(i)} \\ \tan \frac{kL - (2n+1)\pi}{2} & \text{場合(ii)} \end{cases} \quad (34)$$

式(31), (32)で定義される α , γ について, 不等式

$$\alpha\gamma \geq |(1+r^2)^2\cos^2\Theta + (1-r^2)^2\sin^2\Theta - 4r^2\rho^2|$$

が成り立つことは容易に証明できる. したがって, (33)の右辺の根号の中は正となり, β は実数であることが保証される. また, 上の不等式から, 次の不等式

$$4\alpha\gamma - \beta^2 \geq 0$$

の成り立つこともすぐに証明できる.

さらに, $V' \rightarrow 0$ の極限 ($\rho \rightarrow 0$, $\psi \rightarrow kd'$) で, 上の \hat{T} が単純な二重障壁の透過率 T_0 (式(19)で L を $L+d'$ に置きかえたもの) に収束することも容易に確かめられる.

興味があるのは, ρ^2 は大きくないが, $1-r^2$ はそれよりもずっと小さい場合である. このときには, 共鳴ピークに対する散乱ポテンシャルの影響は大きいと期待される. 次の節では, \hat{T} を数値的に計算して描いたグラフを眺めて, この場合について議論しよう.

4. 結果とまとめ

前節で求めた透過率 \hat{T} の k 依存性を見るために、式(29), (30)の右辺を数値的に求めたグラフの一例を図-5に示す。グラフは、 $1/L$ を単位とした k に対して

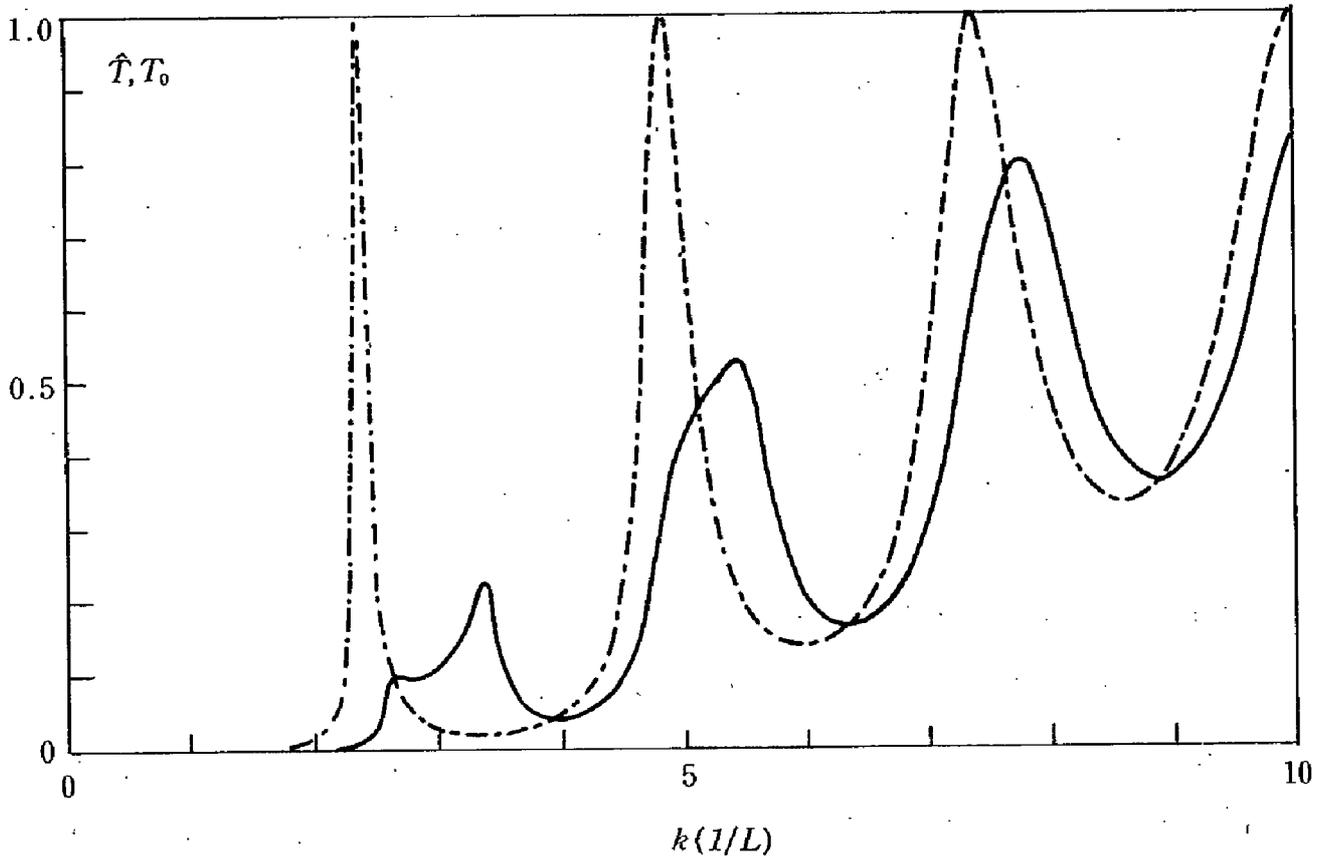


図-5 k の関数として表わした \hat{T} と T_0 。パラメータの値は、 $VL^2=100$, $d/L=0.1$, $V'L^2=100$, $d'/L=0.05$ とした。実線は \hat{T} 、点線は T_0 (上記のパラメータで V' だけを0としたもの)を示す。横軸の目盛は、 $1/L$ を単位として測った k の値。

\hat{T} の値をプロットしてある。計算に用いたパラメータの値は、 $VL^2=100$, $d/L=0.1$, $V'L^2=100$, $d'/L=0.05$ である。参考のために $V'=0$ とした場合のグラフを点線で示した。

共鳴ピークに対する散乱の影響は定性的には、次のようにまとめられる。まず、ピーク的位置は k の大きな方にずれ、巾は広がっている。また、ピークの高さは低くなっている。ピーク位置のずれの大きさや巾の変化は、最低の共鳴

レベルでいちばん大きく、上のレベルに行くにつれて小さくなる。また、ピークの高さの減少も最低レベルで最も大きく、上のレベルに行くほど小さくなっていく。

これらの性質は、次のようにして理解できる。一重障壁の透過率 $(1-r^2)$ の小さい場合を考えている($k^2 < V$ の範囲では、 r は k とともに小さくなっていくが、いま考えている図-4の場合のパラメータに関しては、 $kL \sim 3$ のあたりでも $r \sim 0.9$ である)ので、共鳴ピークが現われるためには、 \hat{T} の表式全体にかかる小さな因子 $(1-r^2)^2$ が、分母から来る因子によって相殺される必要がある。

式(29)、(30)の第一項の分母に現われる因子 $\alpha\gamma \sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}$ は、(31)-(33)を見ると、

$$(1+r^2)\cos\Theta = 2rp \quad (35)$$

をみたす k_+ 、あるいは

$$(1+r^2)\cos\Theta = -2rp \quad (36)$$

をみたす k_- で

$$\alpha\gamma \sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2} = 4[2rp(1-r^2)\sin\Theta]^{3/2} + \dots$$

となる。ただし、 $(1-r^2)$ についての高次の項は省略した。

式(29)、(30)の最後の項の分母に現われる因子 $\alpha\beta\gamma$ も、 $(1-r^2)$ についての最低次の項に限れば上と同じ形をしている：

$$\alpha\beta\gamma = 4[2rp(1-r^2)\sin\Theta]^{3/2} + \dots$$

したがって、 k_+ または k_- の点では、 \hat{T} は $\sqrt{1-r^2}$ に比例している。一方、 k_+ や k_- から離れたところでは、 \hat{T} は $(1-r^2)^2$ に比例しているから、 k_+ や k_- の近くでは \hat{T} はピークをもつ。実際に、 $r=0.9$ とすると、 $\sqrt{1-r^2} : (1-r^2)^2 = 12.1 : 1$ となる。

図に見られる \hat{T} のピークは、 k_+ と k_- に位置する二つのピークが重なり合ったものと考えられる。したがって、ピークの間は

$$|k_+ - k_-| = \left| \cos^{-1} \left(\frac{2rp}{1+r^2} \right) - \cos^{-1} \left(-\frac{2rp}{1+r^2} \right) \right|$$

$$\approx \frac{4rp}{1+r^2} \quad (37)$$

の程度の量となる。 k の増加とともに、 r や ϕ は減少する。したがって、共鳴ピークの中、(37)は最低共鳴単位でいちばん大きく、上のレベルに行くにつれて小さくなっていく。

次に、ピークの位置のずれについて考えてみよう。(35)と(36)の中間で、

$$\cos\Theta = 0$$

という方程式を考えると、その根 k_C は k_+ と k_- の間に位置する(ϕ や ψ の k 依存性があるので、ちょうど真中にくるというわけではないが)。そこで

$$\Theta = k_C L + \phi(k_C) + \psi(k_C) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \quad (38)$$

をみたす k_C をピークの位置の目安としてよいだろう。

$V' = 0$ としたときのピークの位置は、(20)で L を $L + d'$ に置きかえれば得られるから

$$k_R L + \phi(k_R) + k_R d' = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi$$

をみたす k_R で与えられる。

したがって、散乱の影響によるピークの位置のずれ $k_C - k_R$ は

$$(k_C - k_R)(L + d') + \phi(k_C) - \phi(k_R) = k_C d' - \psi(k_C) \quad (39)$$

をみたす。 $\phi(k_C) - \phi(k_R) \cong \phi'(k_R)(k_C - k_R)$ と近似すると(ϕ' は ϕ の導関数)、(39)は

$$k_C - k_R = \frac{1}{L + d' + \phi'(k_R)} (k_C d' - \psi(k_C)) \quad (40)$$

と書きかえることができる。

式(10)、(12)により、 ϕ は

$$\tan\phi = \begin{cases} \frac{2k^2 - V}{2k\kappa} \tanh\kappa d & k^2 \leq V \\ \frac{2k^2 - V}{2k\hat{\kappa}} \tan\hat{\kappa} d & k^2 > V \end{cases}$$

をみます。ただし、 $\hat{\kappa} = \sqrt{k^2 - V}$ 。

したがって、 $k=0$ で $\phi = -\pi/2$ となり、 k の増加とともに ϕ も増大して、直線 kd に下から漸近する。 V を V' 、 d を d' に置きかえれば、 ψ についても同じことがいえる。

このことから、直ちに、(40)の右辺が正であり、その値は k_c の増加とともに減少していくことがわかる。すなわち、散乱の影響によってピークは k が大きくなる方向にずれ、しかも、ずれは共鳴準位が高くなっていくにしたがって小さくなる。このことは、図-5にも現われている。

ピークの高さは、先に述べたように、 $\sqrt{1-r^2} \sqrt{1-\rho^2}$ に比例している。この因子は、 k の小さなところでは1にくらべてかなり小さく、 k の増加とともに増大していく。いいかえると、ピークの高さは、最低共鳴準位で最も低く、上の単位になるにつれて高くなっていく。このことも、図-5に現われている。

以上、 $1-r^2 \ll \rho^2 \ll 1$ の場合に、散乱の効果が、透過率に現われる共鳴ピークの位置や形にどのような影響を与えるかを見てきた。 \hat{T} と T_0 をくらべると、散乱の影響は次のようにまとめられる。

- i) T_0 のピークの高さは1であるのに対して、 \hat{T} のピークの高さは $\sqrt{1-r^2} \sqrt{1-\rho^2}$ に比例していて、1より小さくなっている。
- ii) ピークの中は、 T_0 では障壁ポテンシャルの透過率 $(1-r^2)$ に比例しているのに対して、 \hat{T} では散乱ポテンシャルの反射率 ρ に比例している。
- iii) \hat{T} のピークの位置は、対応する T_0 のピークの位置から k の増加する方向にずれたところにある。ずれの大きさは、散乱ポテンシャルによる波動関数の位相のずれ $kd' - \psi(k)$ に比例している。

最後に、パラメータの値を変えて計算した \hat{T} のグラフを二つ図示する。

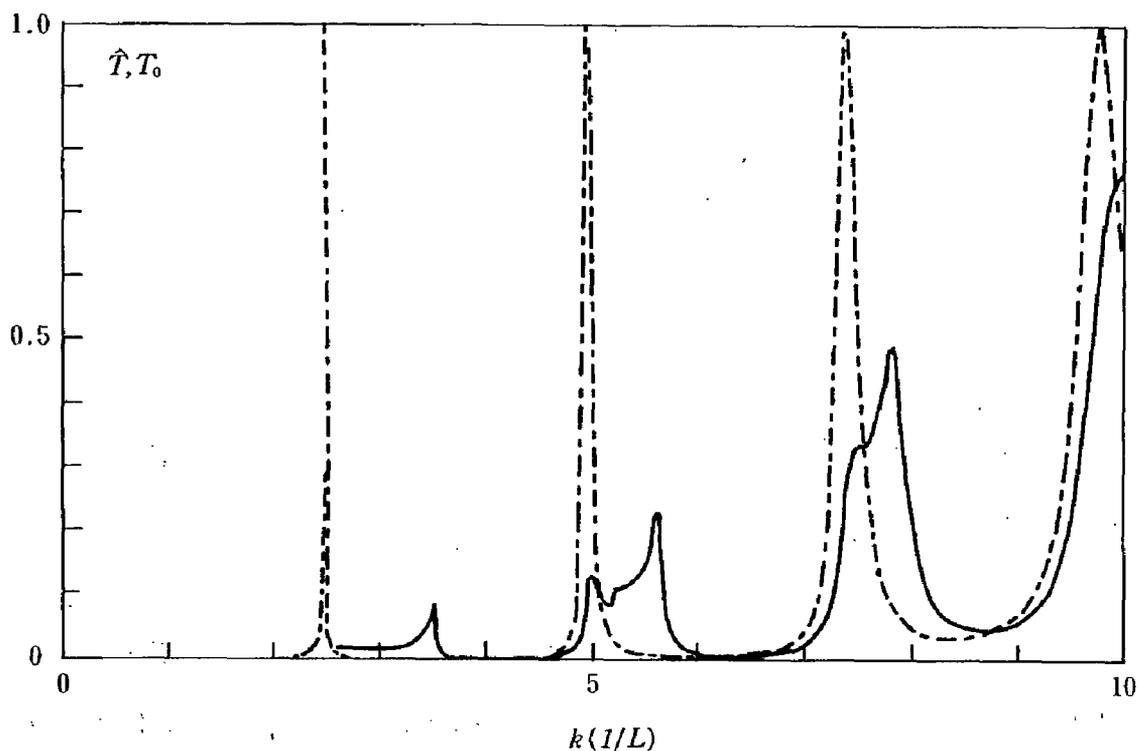


図-6 k の関数として表わした \hat{T} と T_0 . パラメータの値は, $VL^2=100$, $d/L=0.2$, $V'L^2=100$, $d'/L=0.05$ とした. 実線は \hat{T} , 点線は T_0 (上記のパラメータで V' だけを0としたもの)を示す. 横軸の目盛は, $1/L$ を単位として測った k の値.

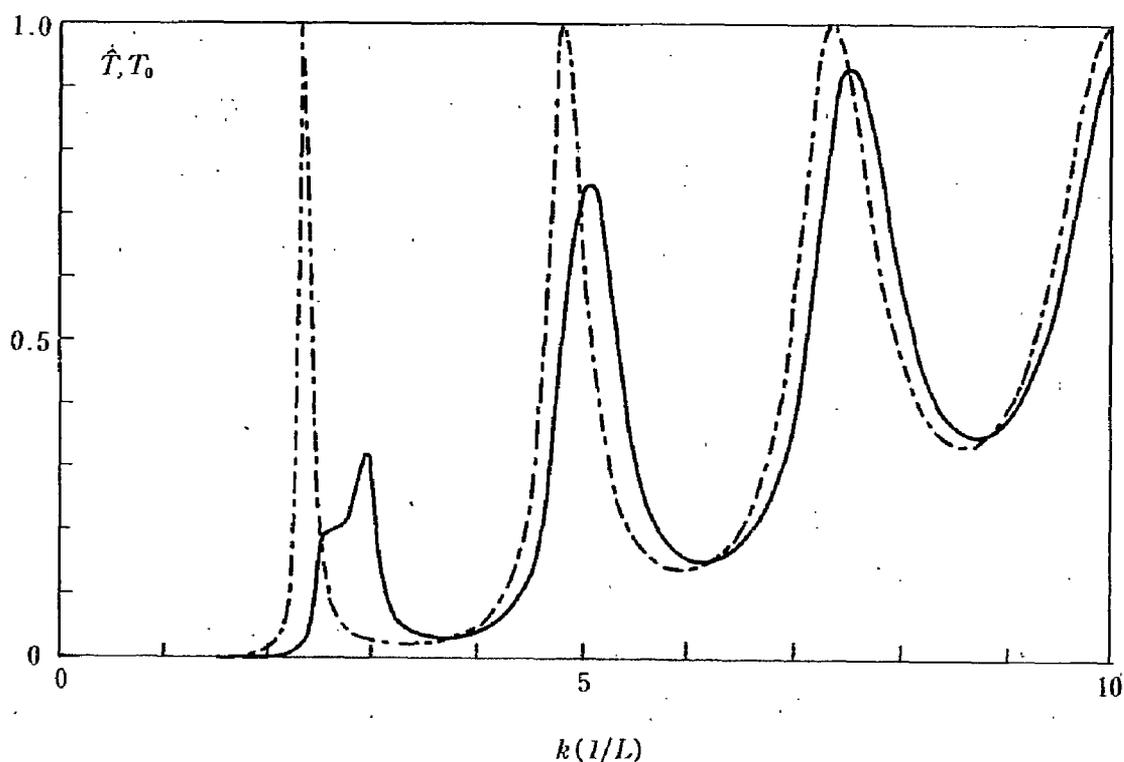


図-7 k の関数として表わした \hat{T} と T_0 . パラメータの値は, $VL^2=100$, $D/L=0.1$, $V'L^2=50$, $d'/L=0.05$ とした. 実線は \hat{T} , 点線は T_0 (上記のパラメータで V' だけを0としたもの)を示す. 横軸の目盛は, $1/L$ を単位として測った k の値.

図-6は、図-5の場合にくらべて、障壁ポテンシャルの厚さが2倍になっている。したがって、障壁ポテンシャルによる反射率 r は、より1に近づいている。図-7では、散乱ポテンシャルの高さが $\frac{1}{2}$ になっていて、 ρ はより小さくなっている。

パラメータを変えたことによる図の変化は、定性的には、上記のi)~iii)でよく説明できる。