Schrödinger 方程式の確率過程による解釈

中　村　孔　一

量子力学では，質量mの質点（以下では，簡単に質点mとよぶことにする）が，ポテンシャル$V(\boldsymbol{x})$をもつ力のもとで行う運動は，Schrödinger 方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{x},t)=\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\triangle+V(\boldsymbol{x})\right\}\psi(\boldsymbol{x},t) \tag{1}$$

で記述される．質点mが，時刻tに点$\boldsymbol{x}$で見いだされる確率密度$\rho(\boldsymbol{x},t)$が，方程式(1)の解である波動関数$\psi(\boldsymbol{x},t)$によって，

$$\rho(\boldsymbol{x},t)=|\psi(\boldsymbol{x},t)|^2 \tag{2}$$

のように与えられるというのが，量子力学の主張である．運動方程式(1)が決定するのは質点mの確率的な挙動であって，mの軌道というような古典力学的な概念は意味をもたなくなる．そこでは運動法則の意味が，古典力学のそれと大きく変っている．

1966年に，E. Neloson は，このような考えの飛躍は必ずしも必要ないという興味ある論文，“Derivation of the Schrödinger Equation from Newtonian Mechanics”，を発表した(Phys. Rev. **150**(1966), 1079)．“We shall attempt to show in this paper that the radical departure from classical physics produced by the introduction of quantum mechanics forty years ago was unnecessary” という文章で，Nelson の論文は始まっている．

$V(\boldsymbol{x})$から導かれる力のもとで，Newton の運方程式に従って運動する質点mが，同時に，質量mに反比例する拡散係数をもつ Brown 運動をしていると

仮定すれば，Schrödinger 方程式(1)が導出できるというのが Nelson の主張である．

この小論では，Nelson の考えを多粒子系に拡張することを試み，その際に現われるいくつかの問題点を議論する．

§１ではNelson の理論を要約する．簡単な例についての具体的な計算を，§２に示す．§３では，多粒子系への拡張を試み，問題点を指摘する．

§１．Nelson の理論

まず，質点mは，次のような確率微分方程式に従う Brown 運動をしているとする：

$$d\boldsymbol{x}(t)\equiv\boldsymbol{x}(t+dt)-\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}(t),t)dt+d\boldsymbol{W}(t). \tag{3}$$

ここで，$\boldsymbol{x}(t)$は時刻tでの質点mの位置を表わす．$\boldsymbol{W}(t)$は Wiener 過程であり，$dt>0$としたときの増分 $d\boldsymbol{W}(t)\equiv\boldsymbol{W}(t+dt)-\boldsymbol{W}(t)$ は，tごとに独立な，平均値がゼロで，分散が dt に比例する Gauss 分布をなす．

$$\langle dW_i(t)\rangle=0, \tag{4}$$

$$\langle dW_i(t)\ dW_j(t)\rangle=\sigma^2\delta_{ij}dt. \tag{5}$$

ただし，$dW_i(t)$ は$d\boldsymbol{W}(t)$の i 成分を意味する．

確率変数 $\boldsymbol{x}(t)$ の関数 $f(\boldsymbol{x}(t),t)$ の“前向き平均導関数”を

$$Df(\boldsymbol{x}(t),t)\equiv\lim_{h\downarrow 0}\left\langle\frac{f(\boldsymbol{x}(t+h),t+h)-f(\boldsymbol{x}(t),t)}{h}\right\rangle_F \tag{6}$$

によって定義する．ただし，平均 $\langle\cdots\cdots\rangle_F$ はtより過去のf，すなわち，$\{f(\boldsymbol{x}(s),s)\ ;\ s\leqq t\}$ を固定した条件つき平均を意味する．

式(3)，(4)，(5)より，(6)の右辺を計算すると

$$Df(\boldsymbol{x}(t),t)=\frac{\partial f}{\partial t}+\boldsymbol{b}(x,t)\cdot\nabla f+\frac{1}{2}\sigma^2\Delta f \tag{7}$$

となる．特に，fとして$\boldsymbol{x}$そのものをとれば，

$$D\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}(t),t) \tag{10}$$

となり，方程式(3)に現れるドリフト速度 $\boldsymbol{b}$ が得られる．これにもう一度 D を作用させて，一種の加速度を定義することはできるが，これは時間の向きについて対称な量ではない．

そこで，(6)に対応して，“後向き平均導関数”

$$D_*f(\boldsymbol{x}(t),\ t)\equiv\lim_{h\downarrow 0}\left\langle\frac{f(\boldsymbol{x}(t),t)-f(\boldsymbol{x}(t-h),t-h)}{h}\right\rangle_B \tag{11}$$

を考える．ただし，$\langle\cdots\cdots\rangle_B$ は t より未来の f，$\{f(\boldsymbol{x}(s),s)\,;\,s\geqq t\}$ を固定した条件つき平均を意味する．

方程式(3)で記述される過程は Markov 過程であるから，その時間反転もまた Markov 過程となり，$\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}(t-h)$ は $\{\boldsymbol{x}(s)\ ;\ s\geqq t\}$ にはよらない．したがって

$$D_*\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{b}_*(\boldsymbol{x}(t),\ t) \tag{12}$$

と書ける．この $\boldsymbol{b}_*$ を用いると，いま考えている Brown 運動は，確立微分方程式

$$d\boldsymbol{x}(t)\equiv\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}(t-dt)=\boldsymbol{b}_*(\boldsymbol{x}(t),\ t)dt+d\boldsymbol{W}_*(t) \tag{13}$$

で記述することもできる．$\boldsymbol{W}_*(t)$ は Winer 過程 $\boldsymbol{W}(t)$ を時間反転した過程であり，$d\boldsymbol{W}_*(t)\equiv\boldsymbol{W}(t)-\boldsymbol{W}(t-dt)$ は

$$\langle dW_{*i}(t)\rangle=0\,, \tag{14}$$

$$\langle dW_{*i}(t)dW_{*j}(t)\rangle=\sigma^2\delta_{ij}dt \tag{15}$$

をみたす．このことに注意して，(11)の右辺を計算すると，

$$D_*f(\boldsymbol{x}(t),t)=\frac{\partial f}{\partial t}+\boldsymbol{b}_*(x,t)\cdot\nabla f-\frac{1}{2}\sigma^2\Delta f \tag{16}$$

となる．

そこで，“前向きの微分”と“後向きの微分”の両方を使って，時間の向きについて対称な形をした平均加速度 $\boldsymbol{a}$ を次のように定義する：

$$\boldsymbol{a}(t)=\frac{1}{2}(DD_*+D_*D)\boldsymbol{x}(t). \tag{17}$$

式(12)にDを作用させて，(7)に注意すると

$$DD_*\boldsymbol{x}(t)=\frac{\partial \boldsymbol{b}_*}{\partial t}+(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}_*+\frac{1}{2}\sigma^2\Delta \boldsymbol{b}_*. \tag{18}$$

同様に，(10)と(16)から

$$D_*D\boldsymbol{x}(t)=\frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial t}+(\boldsymbol{b}_*\cdot\nabla)\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\sigma^2\Delta \boldsymbol{b}. \tag{19}$$

したがって，(17)で定義される$\boldsymbol{a}$は

$$\boldsymbol{a}=\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}-\frac{1}{2}\sigma^2\Delta \boldsymbol{u} \tag{20}$$

と書ける．ここで，

$$\boldsymbol{v}\equiv\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}_*),\quad \boldsymbol{u}\equiv\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}_*). \tag{21}$$

この加速度$\boldsymbol{a}$が Newton の運動方程式

$$m\boldsymbol{a}=-\nabla V(x) \tag{22}$$

に従ってきまるというのが Nelson の理論の要請である．左辺に(20)を代入すれば

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}=(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}-(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+\frac{1}{2}\sigma^2\Delta \boldsymbol{u}-\frac{1}{m}\nabla V \tag{23}$$

となり，力のポテンシャルVとドリフト速度$\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$の間の関係式が得られる．

ポテンシャルVが与えられて，ドリフト速度$\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$が求まるためには，$\boldsymbol{u}$と$\boldsymbol{v}$の間にもうひとつ関係式が必要である．

確率微分方程式(3)と(13)は，同じ過程を時間について前向きと後向きに書き表わしたものであるから，$\boldsymbol{b}$と$\boldsymbol{b}_*$はとうぜん無関係ではない．$\boldsymbol{b}$と$\boldsymbol{b}_*$の間になりたった運動力学的な条件を具体的に書き表わすために，まず(3)と(13)のそれぞれに対応した Fokker-Plank 方程式を考える．時刻tに，位置$\boldsymbol{x}$に質点mが見い出される確率密度(分布関数)を$\rho(\boldsymbol{x}, t)$とする．方程式(3)に対応して，ρは Fokker-Plank の方程式

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\nabla\cdot(\boldsymbol{b}\rho)+\frac{1}{2}\sigma^2\Delta\rho \tag{24}$$

をみたす．さらに，ρ は，方程式(13)に対応して

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\nabla\cdot(\boldsymbol{b}_*\rho)-\frac{1}{2}\sigma^2\Delta\rho \tag{25}$$

という方程式もみたす．

式(24)，(25)を辺々引けば

$$\nabla\cdot(-2\boldsymbol{u}\rho+\sigma^2\nabla\rho)=0. \tag{26}$$

ここで，

$$\boldsymbol{u}=\frac{1}{2}\sigma^2\frac{1}{\rho}\nabla\rho=\frac{1}{2}\sigma^2\nabla\ln\rho \tag{27}$$

とおけば，(26)をみたす．実際に，方程式(7)と(16)を用いて，式(27)を導くことができる．その導出については，例えば，岩波講座『現代物理学の基礎』第2巻，270–273頁を見よ．

一方，(24)，(25)を辺々加えると

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\nabla\cdot(\boldsymbol{v}\rho). \tag{28}$$

式(27)を t で微分して

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}=\frac{1}{2}\sigma^2\nabla\left(\frac{1}{\rho}\quad\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)$$

この右辺に(28)を代入すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}&=-\frac{1}{2}\sigma^2\nabla\left(\frac{1}{\rho}\nabla\cdot(\boldsymbol{v}\rho)\right)\\&=-\frac{1}{2}\sigma^2\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v})-\frac{1}{2}\sigma^2\nabla\left(\boldsymbol{v}\cdot\frac{1}{\rho}\nabla\rho\right).\end{aligned}$$

最右辺の第二項に，再び(27)を代入すると，

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}=-\frac{1}{2}\sigma^2\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v})-\nabla(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}) \tag{29}$$

となり，ドリフト速度$\boldsymbol{u}$と$\boldsymbol{v}$の間の関係式が得られる．

ここで，速度ポテンシャル

$$\boldsymbol{u}=\sigma^2\nabla R, \quad \boldsymbol{v}=\sigma^2\nabla S \tag{30}$$

を導入すると，運動方程式(23)と条件式(29)は，それぞれ

$$\nabla\left[\frac{\partial S}{\partial t}-\frac{1}{2}\sigma^2(\nabla R)^2+\frac{1}{2}\sigma^2(\nabla S)^2-\frac{1}{2}\sigma^2\Delta R+\frac{1}{m\sigma^2}V\right]=0,$$

$$\nabla\left[\frac{\partial R}{\partial t}+\sigma^2(\nabla R)\cdot(\nabla S)+\frac{1}{2}\sigma^2\Delta S\right]=0$$

と書ける．$W=R+iS$とおくと，これらの方程式はひとつにまとまり

$$\nabla\left[i\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2(\nabla W)^2+\frac{1}{2}\sigma^2\Delta W-\frac{1}{m\sigma^2}V\right]=0 \tag{31}$$

となる．さらに

$$\phi=e^W=e^{R+iS} \tag{32}$$

とおくと，(31)は

$$\nabla\left[i\frac{1}{\phi}\ \frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{1}{\phi}\Delta\phi-\frac{1}{m\sigma^2}V\right]=0$$

と書きかえられる．[……]は高々tだけの関数であるから，[……]$=\theta(t)$ とおけて，

$$im\sigma^2\frac{\partial\phi}{\partial t}=-\frac{1}{2m}(m\sigma^2)^2\Delta\phi+(V+\theta)\phi \tag{33}$$

ここで，

$$\psi(\boldsymbol{x},\ t)=\phi(\boldsymbol{x},\ t)\ \exp\left[i\frac{1}{m\sigma^2}\int^t\theta(t')dt'\right] \tag{34}$$

によって，新しい関数ψに移ると，(33)は

$$i(m\sigma^2)\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left\{-\frac{1}{2m}(m\sigma^2)^2\Delta+V(\boldsymbol{x})\right\}\psi \tag{35}$$

とな変る．$\sigma^2=\hbar/m$とすれば，これはSchrödinger方程式(1)と完全に同じである．

さらに，式(27)に(30)の前の式を代入すると

$$\nabla\left(R-\frac{1}{2}\ln\rho\right)=0.$$

$(\cdots\cdots)=\lambda(t)$ とおくと，

$$\rho(\boldsymbol{x},t)=e^{2R(\boldsymbol{x},t)+2\lambda(t)}$$

式(32)，(34)に注意すると，この式の右辺は

$$\rho(\boldsymbol{x},t)=|\psi(\boldsymbol{x},t)|^2e^{2\lambda(t)}$$

と書ける．両辺を全空間で積分すると，左辺からの寄与は，分布関数 ρ の定義より1となる（質点 m は必ず空間のどこかにいる）．一方，方程式(35)の解 ψ について，$|\psi|^2$ の全空間での積分が t に依存しないことはよく知られている．したがって，λ は t にもよらない定数である．特に，$|\psi|^2$ の全空間での積分が1になるように規格化すれば，$\lambda=0$ となる：

$$\rho(\boldsymbol{x},t)=|\psi(\boldsymbol{x},t)|^2.$$

この式は，量子力学における波動関数の解釈(2)と完全に同じである．

要約すると以下のようになる．

空間には，あるランダムな力の場が存在していて，全ての質点は，確率微分方程式(3)（あるいは，(13)）にしたがうBrown運動をしていると考える．ただし，Brown運動の拡散係数は質量に反比例していて，$\hbar/2m$ と書けるとする．さらに，この運動は，式(17)，(22)の意味でNewtonの運動方程式にしたがっているとする。

このとき，時間について前向きおよび後向きのドリフト速度 $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{b}_*$ を使って定義された関数，式(34)の $\psi(\boldsymbol{x},t)$ は，Schrödinger方程式(1)をみなし，時刻 t に質点 m を位置 $\boldsymbol{x}$ に見い出す確率密度 $\rho(\boldsymbol{x},t)$ は，この $\psi(\boldsymbol{x},t)$ を用いて，(2)のように書ける．したがって，量子力学の主張は，古典力学にしたがうBrown粒子の運動として解釈できる．

これがNelsonの主張である．

§2. 簡単な例

いくつかの簡単な例について，確率微分方程式(3)および(13)に現れるドリフト速度を求めてみよう．

i）自由粒子　最初に最も簡単な例として，空間が1次元で，$V=0$ という場合を考えてみよう．初期条件として

$$\psi(x,0)=\frac{1}{\sqrt{L}}e^{ikx} \tag{36}$$

をとる．すなわち，

$$R(x,0)=\frac{1}{2}\ln L,$$

$$S(x,0)=kx$$

方程式(35)は容易に解けて，

$$\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{L}}e^{ikx-i\frac{\hbar}{2m}k^2t}$$

したがって

$$R(x,t)=-\frac{1}{2}\ln L,$$

$$S(x,t)=kx-\frac{\hbar}{2m}k^2t \quad .$$

当然であるが，これらは(31)をみたす．

(30)より，u，v を求めると

$$u=0,\quad v=\frac{\hbar}{m}k \quad .$$

したがって，ドリフト速度 b，b_* は

$$b=b_*=\frac{\hbar}{m}k \quad . \tag{37}$$

次に，同じ系で初期条件を

$$\psi(x,0)=\left(\frac{a}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{a}{2}x^2}$$

にとってみよう．この場合も(35)は解けて，

$$\psi(x,t)=\left(\frac{a}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1+i\tau}}\,e^{-a^2x/2(1+i\tau)} \tag{38}$$

ただし，$\tau=\hbar at/m$.

R と S は

$$R(x,t)=\frac{1}{2}\ln\frac{a}{\sqrt{\pi}}-\frac{ax^2}{2}\,\frac{1}{1+\tau^2}+\frac{1}{4}\ln(1+\tau^2),$$
$$S(x,t)=\frac{ax^2}{2}\,\frac{\tau}{1+\tau^2}+\frac{1}{2}\arg(1+i\tau)$$

となり，(30)より

$$u(x,t)=-\frac{\hbar}{m}\,\frac{ax}{1+\tau^2},\quad v(x,t)=\frac{\hbar}{m}\,\frac{ax\tau}{1+\tau^2}.$$

したがって，b，b_* は

$$b(x,t)=\frac{\hbar}{m}ax\frac{\tau-1}{\tau^2+1},\qquad b_*(x,t)=\frac{\hbar}{m}ax\frac{\tau+1}{\tau^2+1}. \tag{39}$$

外力がゼロ，すなわち，$V=0$ の場合を考えているのに，ドリフト速度が x や t に依存していることに注意しよう．しかも，(37)と(39)を見くらべてみると，初期分布のとり方によってドリフト速度が大きく変っている．いいかえると，ドリフト速度が外力だけではきまらず，Brown 運動の媒質としての真空の性質が，初期分布に影響される奇妙な力学を考えていることになる．

ii） 1 次元調和振動子

$V\neq 0$ の場合の例として，空間が 1 次元で，ポテンシャルが $V=\frac{1}{2}Kx^2$ の場合を考えてみよう．初期条件を

$$\psi(x,0)=\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}\alpha^2x^2},\quad \alpha^2=\frac{\sqrt{mK}}{\hbar}$$

にとる．計算の手続きは，自由粒子の場合と同様であるので省略して，結果だ

けを示すと,

$$b(x,t)=-\sqrt{\frac{K}{m}}x \ , \quad b_*(x,t)=\sqrt{\frac{K}{m}}x$$

となる.

初期条件を

$$\psi(x,0)=\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}}2\alpha x\, e^{-\frac{1}{2}\alpha^2x^2}$$

にとると,

$$b(x,t)=-\sqrt{\frac{K}{m}}x+\frac{\hbar}{m}\frac{1}{x} \ , \quad b_*(x,t)=\sqrt{\frac{K}{m}}x-\frac{\hbar}{m}\frac{1}{x}$$

となる. この場合も初期分布によって, ドリフト速度の形がちがっている.

§ 3. 多粒子系への拡張

§ 1の議論を, 多粒子系の場合に拡張することを試みる. 記述を簡単にするために, 2つの質点からなる系を考える. Nヶの質点系への書きかえは自明である.

時刻 t での位置を $\boldsymbol{x}^{(i)}(t)$ として, 質点 m_i は, 確率微分方程式

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{x}^{(i)}(t) &\equiv \boldsymbol{x}^{(i)}(t+dt)-\boldsymbol{x}^{(i)}(t) \\ &= \boldsymbol{b}^{(i)}(\boldsymbol{x}^{(1)},\ \boldsymbol{x}^{(2)},\ t)dt+d\boldsymbol{W}^{(i)}(t) \end{aligned} \tag{40}$$

にしたがう Brown 運動をしているとする. ここで, $d\boldsymbol{W}^{(i)}(t)\equiv\boldsymbol{W}^{(i)}(t+dt)-\boldsymbol{W}^{(j)}(t)$ は Wiener 過程の増分で,

$$\langle dW_k^{(i)}\rangle=0\ , \tag{41}$$

$$\langle dW_k^{(i)}dW_l^{(j)}\rangle=\frac{\hbar}{m_i}\delta_{kl}\delta_{ij}dt\ . \tag{42}$$

をみたす.

関数 $f(\boldsymbol{x}^{(1)},\boldsymbol{x}^{(2)},t)$ の前向き平均導関数は(6)と同様に定義されて,

$$Df(\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, t)=\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\sum_i \boldsymbol{b}^{(i)}\cdot\nabla^{(i)}+\frac{1}{2}\sum_i\frac{\hbar}{m_i}\ \Delta^{(i)}\right\}f(\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, t) \quad (43)$$

と書ける．特に

$$D\boldsymbol{x}^{(i)}(t)=\boldsymbol{b}^{(i)}(\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, t) \quad (44)$$

である．

(11)と同様に，後向き平均導関数も定義できて，

$$D_*\boldsymbol{x}^{(i)}(t)=\boldsymbol{b}_*^{(i)}(\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, t) \quad (45)$$

とすると，確率過程 $\boldsymbol{x}^{(i)}(t)$ は，後向きの確率微分方程式

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{x}^{(i)}(t) &\equiv \boldsymbol{x}^{(i)}(t)-\boldsymbol{x}^{(i)}(t-dt) \\ &= \boldsymbol{b}_*^{(i)}(\boldsymbol{x}^{(1)}, x^{(2)}, t)dt+d\boldsymbol{W}_*^{(i)}(t) \end{aligned} \quad (46)$$

によっても記述できる．$d\boldsymbol{W}_*^{(i)}$ は $\boldsymbol{W}^{(i)}(t)$ を時間反転した Wiener 過程の増分で，(41)，(42)と同じ形の条件をみたす．

時間の向きについて対称な平均加速度

$$\boldsymbol{a}^{(i)}=\frac{1}{2}(DD_*+D_*D)\boldsymbol{x}^{(i)} \quad (47)$$

に対して，Newton の運動方程式がなりたつことを要請すると，式(23)に対応して，

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{v}^{(i)}}{\partial t} &= \sum_k(\boldsymbol{u}^{(k)}\cdot\nabla^{(k)})\boldsymbol{u}^{(i)}-\sum_k(\boldsymbol{v}^{(k)}\cdot\nabla^{(k)})\boldsymbol{v}^{(i)} \\ &\quad +\frac{1}{2}\sum_k\frac{\hbar}{m_k}\Delta^{(k)}\boldsymbol{u}^{(i)}-\frac{1}{m^i}\nabla^{(i)}V \end{aligned} \quad (48)$$

が成り立つ．ただし，

$$\boldsymbol{v}^{(i)}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}^{(i)}+\boldsymbol{b}_*^{(i)})\ , \quad \boldsymbol{u}^{(i)}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}^{(i)}-\boldsymbol{b}_*^{(i)})\ . \quad (49)$$

一方，(40)にしたがう粒子の分布関数 $\rho(\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, t)$に対する Fokker-Plank 方程式は

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\sum_k\nabla^{(k)}\cdot(\boldsymbol{b}^{(k)}\rho)+\sum_k\frac{\hbar}{2m_k}\Delta^{(k)}\rho \quad (50)$$

と書ける．同じようにして，(46)から，後向きの Fokker-Plank 方程式

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\sum_k\nabla^{(k)}\cdot(\boldsymbol{b}_*^{(k)}\rho)-\sum_k\frac{\hbar}{2m_k}\Delta^{(k)}\rho \tag{51}$$

が導ける．

(50)，(51)を辺々引くと

$$\sum_k\nabla^{(k)}\cdot\left(\boldsymbol{u}^{(k)}\rho-\frac{\hbar}{2m_k}\nabla^{(k)}\rho\right)=0. \tag{52}$$

ところが，(27)を導いたのと同様にして，

$$\boldsymbol{u}^{(k)}=\frac{1}{2}\ \frac{\hbar}{m_k}\nabla^{(k)}\ln\rho \tag{53}$$

が導かれる．これによって，(52)の成立は保証される．

また，(50)，(51)を辺々加えると，

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\nabla^{(k)}\cdot(\boldsymbol{v}^{(k)}\rho) \tag{54}$$

(27)，(28)から(29)を導いたのと同じように，(53)，(54)から ρ を消去して，

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}^{(i)}}{\partial t}=-\frac{1}{2}\ \frac{\hbar}{m_i}\nabla^{(i)}\sum_k\nabla^{(k)}\cdot\boldsymbol{v}^{(k)}-\frac{1}{m_i}\ \nabla^{(i)}\sum_k\ m_k\boldsymbol{u}^{(k)}\cdot\boldsymbol{v}^{(k)} \tag{55}$$

が得られる．

速度ポテンシャル R と S を

$$\boldsymbol{u}^{(i)}=\frac{\hbar}{m_i}\nabla^{(i)}R\ ,\quad \boldsymbol{v}^{(i)}=\frac{\hbar}{m_i}\nabla^{(i)}S \tag{56}$$

によって導入し，

$$W=R+iS \tag{57}$$

とおくと，(48)，(55)はひとつにまとめられて

$$\nabla^{(i)}\left[i\hbar\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{1}{2}\sum_k\frac{\hbar^2}{m_k}(\nabla^{(k)}W)^2+\frac{1}{2}\sum_k\frac{\hbar^2}{m_k}\Delta^{(k)}W+V\right]=0 \tag{58}$$

と書ける．高々 t のみの関数である [……] を $\theta(t)$ と書き，

$$\psi(\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, t) = e^{iW(\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, t) + i\theta(t)} \tag{59}$$

によって ψ を定義すると，(58)より

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left\{-\frac{\hbar^2}{2m_1}\Delta^{(1)} - \frac{\hbar^2}{2m_2}\Delta^{(2)} + V\right\}\psi \ . \tag{60}$$

これは，２粒子系の Schrödinger 方程式に他ならない．

ポテンシャルVが $\boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{x}^{(2)}$ の関数である場合には，Schrödinger 方程式(60)を重心の運動に対する方程式と相対運動の方程式に分離できることはよく知られている：

$$\boldsymbol{X} = \frac{m_1\boldsymbol{x}^{(1)} + m_2\boldsymbol{x}^{(2)}}{m_1 + m_2} \ , \qquad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{x}^{(2)} \tag{61}$$

とすると，

$$\psi(\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, t) = \Psi(\boldsymbol{X}, t)\phi(\boldsymbol{x}, t) \ , \tag{62}$$

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M}\Delta_X\Psi \ , \tag{63}$$

$$i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta_x\phi + V \ . \tag{64}$$

ただし，

$$M = m_1 + m_2 \ , \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ .$$

(59)，(62)に注意すると，Wも分離できて，

$$W(\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, t) = W_G(\boldsymbol{X}, t) + w(\boldsymbol{x}, t)$$

と書ける．

ひとつの例として，一次元空間で，$V = 0$ の場合を考えてみよう．初期分布が

$$\psi(x^{(1)}, x^{(2)}, t) = \frac{1}{\sqrt{L}}e^{ikX}\left(\frac{a}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{a}{2}x^2}$$

で与えられたとして，Wを求めてみよう．

§２のi)の結果を使うと，

$$
\begin{aligned}
W = & -\frac{1}{2}\ln L + i\left(kX - \frac{\hbar}{2M}k^2 t\right) \\
& + \frac{1}{2}\ln\frac{a}{\sqrt{\pi}} - \frac{ax^2}{2}\ \frac{1}{1+\tau} + \frac{1}{4}\ln(1+\tau^2) \\
& + i\frac{ax^2}{2}\ \frac{1}{1+\tau} + i\frac{1}{2}\arg(1+i\tau)
\end{aligned} \tag{65}
$$

と書ける．この式より，(49)，(56)，(57)に注意して，ドリフト速度 $b^{(i)}$，$b_*^{(i)}$を求めると，

$$
\begin{aligned}
b^{(1)} &= \frac{\hbar}{M}k + \frac{\hbar}{m_1}a(x^{(1)} - x^{(2)})\frac{\tau - 1}{\tau^2 + 1}\ , \\
b_*^{(1)} &= \frac{\hbar}{M}k + \frac{\hbar}{m_1}a(x^{(1)} - x^{(2)})\frac{\tau + 1}{\tau^2 + 1}\ , \\
b^{(2)} &= \frac{\hbar}{M}k - \frac{\hbar}{m_2}a(x^{(1)} - x^{(2)})\frac{\tau - 1}{\tau^2 + 1}\ , \\
b_*^{(2)} &= \frac{\hbar}{M}k - \frac{\hbar}{m_2}a(x^{(1)} - x^{(2)})\frac{\tau - 1}{\tau^2 + 1}\ .
\end{aligned}
$$

粒子の間にはたらく力がゼロである場合を考えたのにもかかわらず，各ドリフト速度は相手の粒子の位置に依存している．これは，媒質として真空の性質が初期分布に影響されるというこの力学の奇妙な性格に起因している．

以上のように，Nelson の議論を，形式的に多粒子系に適用することは可能であるが，自由粒子の Brown 運動が，他の粒子の運動の影響を受けるという奇妙な結果になる．この奇妙な相関は，Fermi 統計や Bose 統計といった粒子の統計性をこの理論にとり入れようとする際のひとつの障害になるように見える．いずれにしても，粒子の統計性を Nelson の理論の枠内でどう定式化するかは未解決の難しい問題である．