ラグランジアンをもたない力学系のひとつのモデル

メタデータ	言語: jpn 出版者: 明治大学教養論集刊行会 公開日: 2009-04-15 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 中村, 孔一 メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/10291/4991

ラグランジアンをもたない力学系のひとつのモデル

中 村 孔 一

1. 次のようなハミルトニアン

$$H=\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}q^2 \tag{1}$$

をもつ一次元調和振動子を考えてみよう。正準変数 p, q は，ハミルトンの正準運動方程式

$$\begin{aligned}\dot{p}&=-\frac{\partial H}{\partial q}=-q\\ \dot{q}&=\frac{\partial H}{\partial p}=p\end{aligned} \tag{2}$$

にしたがって時間発展する。

ここで，変数変換

$$\begin{aligned}P&=\frac{1}{\sqrt{2}}(p-iq),\\ &=Q\frac{-i}{\sqrt{2}}(p+iq)\end{aligned} \tag{3}$$

によって，新しい変数 P と Q を導入する。こうして導入された変数 P と Q は，(2)より，方程式

$$\begin{aligned}\dot{P}&=\frac{1}{\sqrt{2}}(\dot{p}-i\dot{q})=\frac{1}{\sqrt{2}}(-q-ip)=-iP,\\ \dot{Q}&=\frac{-i}{\sqrt{2}}(\dot{p}+i\dot{q})=\frac{-i}{\sqrt{2}}(-q+ip)=iQ\end{aligned} \tag{4}$$

にしたがって時間発展する。ハミルトニアン H を新しい変数 P, Q で書くと

$$H=iPQ \tag{5}$$

となるから，方程式(4)は

$$\dot{P}=-\frac{\partial H}{\partial Q},$$

$$\dot{Q}=\frac{\partial H}{\partial P} \tag{6}$$

という形にも書き表わせる。すなわち，新しく導入された変数 P, Q も，ハミルトンの正準運動方程式にしたがって時間発展している。変数変換(3)は正準変換になっていたわけである。

そこで，新しい変数 P, Q で書かれた H，式(5)，に対応するラグランジアンがつくれるかという問題を考えてみよう。いいかえると，オイラー・ラグランジュの方程式が方程式(4)と等価になるような関数 $L(Q, \dot{Q})$ をつくれるかという問題を考えてみる。通常は，方程式(6)の第２式をに P ついて解いて（Pを$\dot{Q}$ と Q の関数として），

$$L=P\dot{Q}-H \tag{7}$$

に代入すれば，ラグランジアン $L(\dot{Q}, Q)$ が得られるわけであるが，いまの場合は，(6)の第２式はPを含まないので，この手続きを実行することができない。Pを Q と $\dot{Q}$ の関数として表わすことができないわけである。しかも，(6)の第２式を代入すると(7)の右辺はゼロになってしまう。

2. 上の問題を少し一般化して，次のような問題を考えてみよう。

系のハミルトニアンが

$$H=Pf(Q) \tag{8}$$

で与えられているとしよう（$f(Q)=iQ$ とすれば，上の場合に一致する）。このとき，対応するラグランジアンがつくれるかというのが問題である。

正準運動方程式は

$$\dot{P}=-\frac{\partial H}{\partial Q}=-Pf'(Q),$$

$$\dot{Q}=\frac{\partial H}{\partial P}=f(Q) \tag{9}$$

となり，やはり第２式はPを含まない。したがって，Pを$\dot{Q}$とQの関数として求めることはできず，通常の手続きでラグランジアンをつくることはできない。

そこで，λを微小量として，(8)に付加項をつけたハミルトニアンを考える

$$H_\lambda= Pf(Q) + \frac{\lambda}{2} P^2 \tag{10}$$

そうすると

$$\dot{Q}=\frac{\partial H_\lambda}{\partial P}=f(Q)+\lambda P \tag{11}$$

であり，これをPについて解けば

$$P=\frac{1}{\lambda}\left(\dot{Q}-f(Q)\right)$$

となって，Pが$\dot{Q}$とQの関数として表わされる。ハミルトニアン H_λ に対応するラグランジアンは，この関数を使って

$$L=P\dot{Q}-H=P\dot{Q}-Pf(Q)-\frac{\lambda}{2}P^2$$

からPを消去して得られる：

$$L_\lambda=\frac{1}{2\lambda}\left(\dot{Q}-f'(Q)\right)^2 \tag{12}$$

このラグランジアンから，オイラー・ラグランジュの方程式をつくると，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_\lambda}{\partial \dot{Q}}\right)-\frac{\partial L_\lambda}{\partial Q}=\frac{1}{\lambda}\frac{d}{dt}\left(\dot{Q}-f(Q)\right)+\frac{1}{\lambda}\left(\dot{Q}-f(Q)\right)f'(Q)$$

$$=\frac{1}{\lambda}\left(\ddot{Q}-f(Q)f'(Q)\right)=0$$

となり，Qは方程式

$$\ddot{Q}=f(Q)f'(Q) \tag{13}$$

にしたがって時間発展する。この方程式(13)は，(9)の第２式をもういちど時間で微分した式になっている。

まとめると，式(12)で定義されるラグランジアン L_λ から導かれるオイラー・ラグランジュの方程式は，式(8)で与えられるハミルトニアンから導かれる正準運動方程式(9)の第２式（の時間微分）に一致する。

方程式(11)の時間微分でなく，(9)の第２式の時間微分が得られたことは奇妙に思えるが，実は，この式は(11)の時間微分にも一致しているのである。それをみるのには，次のようにすればよい。式(11)と組になる式

$$\dot{P}=-\frac{\partial H_\lambda}{\partial Q}=-Pf'(Q) \tag{14}$$

に注意して，(11)の時間微分

$$\ddot{Q}=f'(Q)\dot{Q}+\lambda\dot{P}=f'(Q)f(Q)+\lambda Pf'(Q)+\lambda\dot{P}$$

からPを消去すれば，(13)が得られる。

というわけで，正確にいうと，L_λ から得られるのは，(9)の第２式の時間微

分であって(9)の第2式そのものではない。

おもしろいことに，(9)の第一式のほうは，L_λ から導き出せる。L_λ をラグランジアンとするとQと共役運動量Pは

$$P=\frac{\partial L_\lambda}{\partial\dot{Q}}=\frac{1}{\lambda}\left(\dot{Q}-f(Q)\right) \tag{15}$$

で与えられる。この式を時間で微分した式

$$\dot{P}=\frac{1}{\lambda}\left(\ddot{Q}-f'(Q)\dot{Q}\right)$$

から，(13)と(15)を使って $\ddot{Q}$ と $\dot{Q}$ を消去すると，

$$\dot{P}=-Pf'(Q) \tag{16}$$

となって，(9)の第1式が得られたことになる。しかし，このことも，$\partial H_\lambda/\partial Q=\partial H/\partial Q$ に注意すれば自明のことである。

以上の考察から，本来のわれわれの問題である“式(8)で与えられるハミルトニアンHに対応するラグランジアンはつくれるか”という問に対しては，次のように答えることができる。

ハミルトニアンHから導かれる正準運動方程式(9)を完全に再現するためには，L_λ から得られる式(15)と(16)で $\lambda\to0$ の極限をとる必要がある（実際には，(16)は λ に依存していないが）。ただし，式(12)から明らかなように，この極限でL_λ そのものは発散してしまう。その意味では上の問に対する答は“つくれない”ということになる。しかし，λを有限にして，運動方程式を導いてから$\lambda\to0$ にすると解釈すれば，シンボリックな意味で，

$$L=\lim_{\lambda\to0}L_\lambda$$

が求めるラグランジアンであるといえる。また L_λ から出発して逆にハミルトニアンをつくると(10)の H_λ が得られるから

$$H=\lim_{\lambda\to0}H_\lambda$$

は，もとのハミルトニアン(8)を再現する。

なお，上に述べたように，このモデルでは，正準方程式(9)の第2式を時間微分した式は（1式とともに），λ を有限にしたままの L_λ から導かれる。

3. 以上の議論を多自由度の場合に拡張することは容易である。

次のようなラグランジアンをもつN自由度の系を考える：

$$L_\lambda = \frac{1}{2\lambda} \sum_{i=1}^{N} (\dot{Q}_i - f_i(Q_1, \ Q_2, \cdots\cdots, Q_N))^2. \tag{17}$$

Q_i の共役運動量 P_i は

$$P_i = \frac{\partial L_\lambda}{\partial \dot{Q}_i} = \frac{1}{\lambda} \ (\dot{Q}_i - f_i \ (Q_1, Q_2, \cdots\cdots, Q_N)) \tag{18}$$

で与えられる。

通常の手続きによって，L_λ に対応するハミルトニアン H_λ をつくると，

$$\begin{aligned} H_\lambda &= P_i \dot{Q}_i - L_\lambda \\ &= P_i \ (\lambda P_i + f_i(Q_1, Q_2, \cdots\cdots Q_N)) - \frac{1}{2\lambda} (\lambda P_i)^2 \\ &= \frac{\lambda}{2} P_i^2 + P_i f_i \ (Q_1, Q_2, \cdots\cdots, Q_N) \end{aligned} \tag{19}$$

となる。ここで，ひとつの項に同じ添字が二度あらわれたら，その添字について1からNまでの和をとるということにして，総和記号を省略した。

ここで，$\lambda \to 0$ の極限をとると，

$$H = \lim_{\lambda \to 0} H_\lambda = P_i f_i \ (Q_1, Q_2, \cdots\cdots, Q_N). \tag{20}$$

これは，ハミルトニアン(8)の一般化になっている。このHから導かれる正準方程式は

$$\begin{aligned} \dot{P}_i &= -P_j \frac{\partial f_j}{\partial Q_i}, \\ \dot{Q}_i &= f_i. \end{aligned} \tag{21}$$

前述の場合と同じように，(21)の第２式も P_i を含んでいないので，通常の方法でHに対応するラグランジアンをつくることはできない。しかし，式(17)で定義される L_λ から出発して，適当な段階で $\lambda \to 0$ の極限をとることによって，方程式(21)を導くことはできる。

まず，式(17)の L_λ をラグランジアンとして，オイラー・ラグランジュの方程式を書くと，

$$\frac{1}{\lambda} \left[\ddot{Q}_i - \dot{Q}_j \frac{\partial f_i}{\partial Q_j} + (\dot{Q}_j - f_j) \frac{\partial f_j}{\partial Q_i} \right] = 0. \tag{22}$$

ところが，共役運動量の定義式(18)に着目すると，(22)は

$$\ddot{Q}_i - \dot{Q}_j \frac{\partial f_i}{\partial Q_j} + \lambda P_j \ \frac{\partial f_j}{\partial Q_i} = 0 \tag{23}$$

と書き変えることができる。一方，式(18)を時間で微分すると，

$$\dot{P}_i = \frac{1}{\lambda}\left(\ddot{Q}_i - \dot{Q}_j \frac{\partial f_i}{\partial Q_j}\right) \cdots\cdots$$

式(23)と見くらべると，この式は

$$\dot{P}_i = -P_j \frac{\partial f_j}{\partial Q_i}$$

と書ける。この式と，式(18)で $\lambda \to 0$ とした式

$$\dot{Q}_i - f_i = 0$$

を併せると，方程式(21)が得られたことになる。この意味で，式(20)で定義されるハミルトニアンHに対応するラグランジアンは，シンボリックな意味で

$$L = \lim_{\lambda \to 0} L_\lambda$$

で与えられるといえる。