

Thermo Field Dynamics による熱拡散の理論

| | |
|-------|--|
| メタデータ | 言語: jpn 出版者: 明治大学教養論集刊行会 公開日: 2009-04-15 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 中村, 孔一 メールアドレス: 所属: |
| URL | http://hdl.handle.net/10291/4969 |

Thermo Field Dynamics

による熱拡散の理論

中 村 孔 一

1. はじめに

熱平衡状態にある系では，粒子の速度分布は等方的であって，巨視的な粒子の流れはない。しかし，温度が一様でない非平衡系では，温度差を駆動力とした物質の流れが生じることはよく知られている。熱拡散とよばれるこの現象を，微視的な立場から論じた仕事は数多くあるが，そのほとんどは，Boltzmann 方程式などを用いた運動学的な議論に基づいている。この現象に対して，線型応答理論に基づく議論を展開することの難しさは，流れをひきおこす原因を力学的な摂動として表現できないところにある。

この論文では，梅沢たちによって提唱された thermo field dynamics¹⁾ を用いて，この現象の微視的理論を定式化することを試みる。

第2節では，対象とするモデルの導入と，thermo field dynamics による問題の定式化を行う。第3節では，熱拡散による粒子の流れを摂動論により求める式を導出し，self-consistent Born 近似で解を求める。第4節では，求めた近似解が，連続の方程式を満足することを確かめる。

2. 拡散流密度の計算

問題を定式化する枠組は，熱伝導に関する江沢の論文²⁾ に従う。対象とする

系は、次のような Hamiltonian をもつ Bose 粒子のガスである：

$$H = H_0 + \lambda H' \quad (1)$$

$$\text{ただし, } H_0 = \int \phi_1^\dagger(x) (-\Delta/2m - \mu) \phi_1(x) dx, \quad (2)$$

$$H' = \int \phi_1^\dagger(x) \phi_1^\dagger(y) v(x-y) \phi_1(y) \phi_1(x) dx dy. \quad (3)$$

ここで、 μ は系の化学ポテンシャルを表わす。

系の初期条件を設定するために、粒子間の相互作用は、時刻 $t = -t_\infty$ では存在せず、それ以後に断熱的に導入されたと考える。

thermo field dynamics では、温度 T の熱平衡状態を表わす“状態ベクトル”は

$$|\beta\rangle = \exp \left[\int dk \{ a^\dagger(k) \bar{a}^\dagger(k) - a(k) \bar{a}(k) \} \theta(k, \beta) \right] |0\rangle \otimes |0\rangle \quad (4)$$

と表わされる¹⁾。ここで、パラメータ $\theta(k, \beta)$ は

$$\sinh^2 \theta(k, \beta) = 1 / (e^{\beta \omega_k} - 1) \quad (5)$$

で与えられる。ただし、 $\beta = 1/k_B T$ (k_B は Boltzmann 定数)、 $\omega_k = k^2/2m - \mu$ である。

系の温度 (の逆数) が微小量 $\Delta\beta$ だけ変化したとすると、状態ベクトルは

$$|\beta + \Delta\beta\rangle = (1 - iG\Delta\beta) |\beta\rangle \quad (6)$$

となる。ただし、

$$G = i \int dk \{ a^\dagger(k) \bar{a}^\dagger(k) - a(k) \bar{a}(k) \} \frac{\partial \theta(k, \beta)}{\partial \beta}. \quad (7)$$

$$\text{記法 } \Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{pmatrix} = (2\pi)^{-3/2} \int dk e^{ikx} \begin{pmatrix} a(k) \\ \bar{a}^\dagger(k) \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$kx = k \cdot x - \omega_k t$$

を導入すると、上の G は

$$G = \int \Phi^\dagger(X + \xi/2) \tau_2 \Phi(X - \xi/2) g(\xi, \beta) dX d\xi \quad (9)$$

$$\text{と書ける。ただし, } g(\xi, \beta) = - (2\pi)^{-3} \int dk e^{ik \cdot \xi} \frac{\partial}{\partial \beta} \theta(k, \beta) \quad (10)$$

$$\text{であり, } \tau_2 \text{ は Pauli の行列 } \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

を表わす。表式 (9) が局所的な演算子の積分で表わされていることに着目し

て、微小な温度変化 4β が場所に依存する場合に、式 (6) を拡張しようというのが江沢のアイデアである²⁾。すなわち、 $\beta_a(X)$ を微小な温度のゆらぎとしたとき、一様でない温度 (の逆数) $\beta + \beta_a(X)$ をもつ状態の“状態ベクトル”は、

$$|\beta + \beta_a(X)\rangle = (1 - i\Gamma[\beta_a])|\beta\rangle, \quad (12)$$

$$\Gamma[\beta_a] = \int \phi_1^*(X + \xi/2) \tau_2 \phi_1(X - \xi/2) g(\xi, \beta) \beta_a(X) d\xi dX \quad (13)$$

で与えられると考えられる。

時刻 $t = -t_\infty$ に、系が状態 $|\beta + \beta_a(X)\rangle$ にあったとして、十分に後の時刻 t での粒子の巨視的な流れを計算することが、われわれの目的である。時刻 t での流れの密度は

$$\langle J_t(x) \rangle = \langle \beta + \beta_a(X) | J_t^H(x) | \beta + \beta_a(X) \rangle \quad (14)$$

で与えられる。ここで $J_t^H(x)$ は Heisenberg 表示での流れの密度の演算子であり、相互作用表示での場の演算子 $\phi_1(x)$ を用いて次のように書ける：

$$J_t^H(x) = U^\dagger(t, -t_\infty) J_t(x) U(t, -t_\infty), \quad (15)$$

$$J_t(x) = \frac{1}{2mi} \left[\phi_1^\dagger(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \phi_1(x) - \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \phi_1^\dagger(x) \right) \phi_1(x) \right]. \quad (16)$$

ただし、変換の演算子 U は、

$$U(t, -t_\infty) = \exp \left[-i\lambda \int_{-t_\infty}^t \mathcal{H}'(t') dt' \right]. \quad (17)$$

ここで、 \mathcal{H}' は相互作用 Hamiltonian (3) からつくられる thermo field dynamic Hamiltonian であり、

$$\mathcal{H}' = \sum_{\alpha=1}^2 \varepsilon_\alpha \int \phi_{\alpha'}^\dagger(x) \phi_{\alpha'}^\dagger(y) v(x-y) \phi_\alpha(x) \phi_\alpha(y) dx dy \quad (18)$$

で与えられる。ただし、 $\varepsilon_\alpha = (-1)^{\alpha-1}$ 。

式(12)と(15)を、(14)の右辺に代入し、微小なゆらぎ β_a の一次までをとると、

$$\langle J_t(x) \rangle = 2\text{Im} \langle \beta | T [U(t_\infty, -t_\infty) J_t(x) \Gamma[\beta_a]] | \beta \rangle \quad (19)$$

と書ける。上の式で、 $T[\dots]$ は T 積をとることを意味する。

ここで、次のような関数を定義する：

$$S_{\alpha\beta}(x, y) = \langle \beta | T[U(\infty, -\infty) \phi_\alpha(x) \phi_\beta^\dagger(y) \Gamma[\beta_\alpha]] | \beta \rangle \quad (20)$$

式(16)に注意すると, (19)は

$$\langle J_i(x) \rangle = \lim_{x \rightarrow y} 2\text{Im} \left[\frac{1}{2mi} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial y_i} \right) S_{11}(x, y) \right] \quad (21)$$

と書ける。ただし, (19)の右辺で U 中の t_∞ を ∞ で置き変えた。

したがって, 拡散流密度 $\langle J_i(x) \rangle$ の計算は, 式(20)で定義される "グリーン関数" $S_{\alpha\beta}$ の計算に帰着される。

3. 摂動論による計算

この節では, 式(20)で定義される $S_{\alpha\beta}$ を摂動論によって計算する。

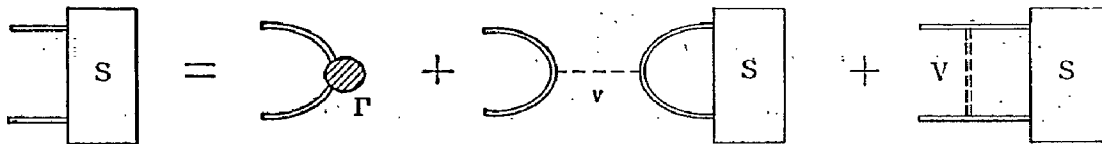


図1 a

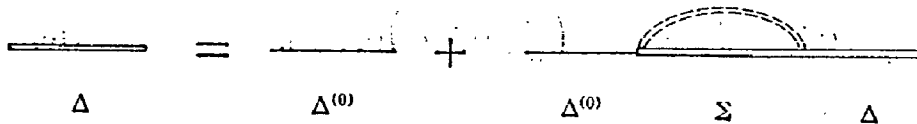


図1 b

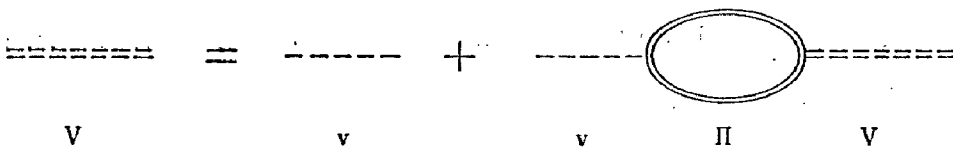


図1 c

図1 a のようなグラフからの寄与だけをとるという近似 (ladder 近似と self-consistent Born 近似の組合せ) では, $S_{\alpha\beta}$ の運動量表示,

$$S_{\alpha\beta}(p, k) = \int dx dy e^{-ip(x-y) - i\frac{1}{2}k(y+y)} S_{\alpha\beta}(x, y), \quad (22)$$

$$(px = p \cdot x - \omega_p t)$$

は次の方程式の解で与えられる:

$$S_{\alpha\beta}(p, k) = f_{\alpha\beta}(p, k) + \sum_{\sigma, \lambda} \int d p' K_{\alpha\beta, \sigma\lambda}(p, p'; k) S_{\sigma\lambda}(p', k), \quad (23)$$

$$f_{\alpha\beta}(p, k) = \sum_{\sigma, \lambda} \Delta_{\alpha\sigma}(p + \frac{1}{2}k) (\tau_2)_{\sigma\lambda} \Delta_{\lambda\beta}(p - \frac{1}{2}k) g(p) \beta_a(k) e^{-ik_0 t_0}, \quad (24)$$

$$K_{\alpha\beta, \sigma\lambda}(p, p'; k) = (2\pi)^{-4} [i\lambda\delta_{\sigma\lambda}\epsilon_{\sigma\nu}(p) - V_{\sigma\lambda}(p - p')] \Delta_{\alpha\sigma}(p + \frac{1}{2}k) \Delta_{\lambda\beta}(p - \frac{1}{2}k). \quad (25)$$

ここで、 $\Delta_{\alpha\beta}(p)$ は “着物をきた” 伝播関数であって、方程式

$$\Delta_{\alpha\beta}(p) = \Delta_{\alpha\beta}^{(0)}(p) - \sum_{\sigma, \lambda} \Delta_{\alpha\sigma}^{(0)}(p) \Sigma_{\sigma\lambda}(p) \Delta_{\lambda\beta}(p), \quad (26)$$

$$\Sigma_{\sigma\lambda}(p) = (2\pi)^{-4} \int d q V_{\sigma\lambda}(p - q) \Delta_{\sigma\lambda}(q) \quad (27)$$

で与えられる (図 1 b)。ただし、 $\Delta^{(0)}(p)$ は自由場の伝播関数であって、次のような 2×2 行列で表わされる (詳しくは、文献 1) p 132 を見よ) :

$$\Delta^{(0)}(p) = U_B(p) \tau_3 [p_0 - \omega_p + i\delta\tau_3]^{-1} U_B(p). \quad (28)$$

$$\text{ここで、} \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad U_B(p) = \begin{pmatrix} c(p) & d(p) \\ d(p) & c(p) \end{pmatrix},$$

$$c(p) = \cosh \theta(p, \beta), \quad d(p) = \sinh \theta(p, \beta). \quad (29)$$

ただし、 $\theta(p, \beta)$ は式 (5) で与えられるパラメータであり、 δ は正の微小量を表わす。

また、“着物をきた” ポテンシャル V は、次の式で与えられる (図 1 c) :

$$V_{\alpha\beta}(p) = -i\lambda\epsilon_{\alpha\nu}(p) [\delta_{\alpha\beta} + \sum_{\sigma} \Pi_{\alpha\sigma}(p) V_{\sigma\beta}(p)], \quad (30)$$

$$\Pi_{\alpha\beta}(p) = -(2\pi)^{-4} \int d q \Delta_{\alpha\beta}(q) \Delta_{\beta\alpha}(q - p). \quad (31)$$

ここで、方程式 (30) を解くために、分極部分 $\Pi_{\alpha\beta}(p)$ の p 依存性を無視する近似を行う : $\Pi_{\alpha\beta}(p) \simeq \Pi_{\alpha\beta}(0) = -(2\pi)^{-4} \int d q \Delta_{\alpha\beta}(q) \Delta_{\beta\alpha}(q)$. (32)

さらに、 $\Pi(0)$ の各成分が等しいと仮定してみよう、すなわち、

$$\Pi_{11}(0) = \Pi_{22}(0) = \Pi_{12}(0) = \Pi_{21}(0) \equiv \kappa. \quad (33)$$

そうすると、方程式 (30) は簡単に解けて、 $V(p)$ は

$$V(p) = -i\lambda v(p) \tau_3 - \lambda^2 \kappa v^2(p) (I - \tau_1) \quad (34)$$

$$\text{と書ける。ただし、} I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (35)$$

方程式(26)を A について解くと,

$$\begin{aligned} A(p) &= [I + A^{(0)}(p) \Sigma(p)]^{-1} A^{(0)}(p) \\ &= [(A^{(0)}(p))^{-1} + \Sigma(p)]^{-1}. \end{aligned}$$

式(28)より, $(A^{(0)}(p))^{-1} = (p_0 - \omega_p) \tau_3 + i\delta (U_B^{-1})^2$

と書けるから, $A(p) = [(p_0 - \omega_p) \tau_3 + \Sigma(p) + i\delta (U_B^{-1})^2]^{-1}$. (36)

式(34)より, いまの近似では, V は p_0 によらない。したがって, (27)で与えられる Σ も p_0 によらない。そこで,

$$\Sigma(p) = \sum_{i=0}^3 \sigma_i(p) \tau_i \quad (\tau_0 \equiv I) \quad (37)$$

と置くと, (36)は

$$A(p) = \frac{1}{(p_0 - \omega_p + \sigma_3)^2 - \sigma_0^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2} \begin{pmatrix} p_0 - \omega_p + \sigma_3 - \sigma_0 & \sigma_1 - i\sigma_2 \\ \sigma_1 + i\sigma_2 & -p_0 + \omega_p - \sigma_3 - \sigma_0 \end{pmatrix} \quad (38)$$

と書ける。ただし, $\delta = 0$ とした。これを, (27)に代入し, V として(34)をとると, q_0 積分は実行できて, $\sigma_i(p)$ に対する次のような方程式が得られる:

$$\begin{aligned} \sigma_i(p) &= \frac{\lambda^2 \kappa}{2} \int \frac{dq}{(2\pi)^3} v^2(p-q) \frac{\sigma_i(q)}{\sqrt{\sigma_1^2(q) + \sigma_2^2(q) - \sigma_0^2(q)}}, \quad i=0, 1, 2; \\ \sigma_3(p) &= \frac{i\lambda}{2} \int \frac{dq}{(2\pi)^3} v(p-q) \frac{\sigma_0(q)}{\sqrt{\sigma_1^2(q) + \sigma_2^2(q) - \sigma_0^2(q)}}. \end{aligned} \quad (39)$$

ただし, $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_0^2 > 0$ とした。

方程式(39)が, ひとつの解として,

$$\sigma_1 = \frac{\lambda^2 \kappa}{2} \int \frac{dq}{(2\pi)^3} v^2(q) \equiv \gamma, \quad \sigma_0 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \quad (49)$$

をもつことは容易に見てとれる。この解を(38)に代入すると, $A(p)$ は

$$\begin{aligned} A(p) &= \frac{1}{(p_0 - \omega_p)^2 + \gamma^2} \begin{pmatrix} p_0 - \omega_p & \gamma \\ \gamma & -p_0 + \omega_p \end{pmatrix} \\ &= U_+ D_+(p) + U_- D_-(p) \end{aligned} \quad (50)$$

と書ける。ここで,

$$U_+ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}, \quad U_- = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix} \quad (51)$$

であり, $D_{\pm}(p) = \frac{1}{p_0 - \omega_p \pm i\gamma}$ (52)

である。

この $\Delta(p)$ を, (32) の右辺に代入すると,

$$\Pi_{11}(0) = \Pi_{22}(0) = -(2\pi)^{-4} \int dq \frac{(q_0 - \omega_q)^2}{[(q_0 - \omega_q)^2 + \gamma^2]^2},$$

$$\Pi_{12}(0) = \Pi_{21}(0) = -(2\pi)^{-4} \int dq \frac{\gamma^2}{[(q_0 - \omega_q)^2 + \gamma^2]^2}$$

となる. ところが, $\int dq_0 \frac{(q_0 - \omega_q)^2}{[(q_0 - \omega_q)^2 + \gamma^2]^2} = \int dq_0 \frac{\gamma^2}{[(q_0 - \omega_q)^2 + \gamma^2]^2} = \frac{\pi}{2}$

であるから, q による積分を適当に cut-off することにすれば, 仮定(33)が成り立つ.

まとめると, (32) の近似のもとで, (34) で表わされる $V(p)$ と (50) で表わされる $\Delta(p)$ の組は, 方程式 (26), (27), (30), (31) の self-consistent なひとつの解になっている.

そこで, この解を用いて, $S(p, k)$ に対する方程式 (23) - (25) を解くことにする.

$V(p)$ は p_0 によらないので, 式 (25) で与えられる $K(p, p'; k)$ は p_0' によらない. そこで方程式 (23) の両辺を p_0 で積分すると,

$$\begin{aligned} \hat{S}_{\alpha\beta}(p, k) &= h_{\alpha\beta}(p, k) g(p) \beta_\alpha(k) e^{-ik_0 t_{\infty}} \\ &+ \sum_{\sigma\eta} \int dp' \hat{K}_{\alpha\beta, \sigma\eta}(p, p'; k) \hat{S}_{\sigma\eta}(p', k) \end{aligned} \quad (53)$$

が得られる. ただし, $\hat{S}_{\alpha\beta}(p, k) = \int dp_0 S_{\alpha\beta}(p, k)$, (55)

$$h_{\alpha\beta}(p, k) = \int dp_0 \left(\Delta\left(p + \frac{1}{2}k\right) \tau_2 \Delta\left(p - \frac{1}{2}k\right) \right)_{\alpha\beta}, \quad (56)$$

$$\hat{K}_{\alpha\beta, \sigma\eta}(p, p'; k) = \int dp_0 K_{\alpha\beta, \sigma\eta}(p, p'; k). \quad (57)$$

ここで, $\int dp_0 D_{\pm}\left(p + \frac{1}{2}k\right) D_{\pm}\left(p - \frac{1}{2}k\right) = 0$, (58)

$$\begin{aligned} &\int dp_0 D_{\pm}\left(p + \frac{1}{2}k\right) D_{\mp}\left(p - \frac{1}{2}k\right) \\ &= \pm 2\pi i \left[k_0 - \frac{1}{m} k \cdot p \pm 2i\gamma \right]^{-1} \equiv \pm H_{\pm}(p, k) \end{aligned} \quad (59)$$

に注意すると, (56) の右辺は,

$$h_{\alpha\beta}(p, k) = h_{\alpha\beta}^{(+)}(p, k) + h_{\alpha\beta}^{(-)}(p, k), \quad (60)$$

$$h_{\alpha\beta}^{(\pm)}(\mathbf{p}, k) = -(U_{\pm\tau_3})_{\alpha\beta} H_{\pm}(\mathbf{p}, k) \quad (61)$$

と書ける。

さらに、多少の、しかし、初等的な計算を実行することによって、式(61)で定義される $h_{\alpha\beta}^{(\pm)}(\mathbf{p}, k)$ が、等式

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma\eta} \hat{K}_{\alpha\beta, \sigma\eta}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; k) h_{\sigma\eta}^{(\pm)}(\mathbf{p}', k) \\ = \pm (2\pi)^{-4} \lambda^2 \kappa v^2 (\mathbf{p} - \mathbf{p}') H_{\pm}(\mathbf{p}', k) h_{\alpha\beta}^{(\pm)}(\mathbf{p}, k) \end{aligned} \quad (62)$$

をみたすことが示される。

この等式を利用すると、積分方程式 (53) を反復法によって解くことができる。

$$\begin{aligned} \text{漸化式 } I_{\pm}^{(n)}(\mathbf{p}, k) &= \pm (2\pi)^{-4} \lambda^2 \kappa \int d\mathbf{p}' v^2 (\mathbf{p} - \mathbf{p}') H_{\pm}(\mathbf{p}', k) I_{\pm}^{(n-1)}(\mathbf{p}', k), \quad n \geq 1, \\ I_{\pm}^{(0)}(\mathbf{p}, k) &= g(\mathbf{p}) \end{aligned} \quad (63)$$

によって定義される関数列 $\{I_{\pm}^{(n)}(\mathbf{p}, k)\}$ を考えると、(53) の解は

$$\begin{aligned} \hat{S}_{\alpha\beta}(\mathbf{p}, k) &= \hat{S}_{\alpha\beta}^{(+)}(\mathbf{p}, k) + \hat{S}_{\alpha\beta}^{(-)}(\mathbf{p}, k), \\ \hat{S}_{\alpha\beta}^{(\pm)}(\mathbf{p}, k) &= h_{\alpha\beta}^{(\pm)}(\mathbf{p}, k) \left(\sum_n I_{\pm}^{(n)}(\mathbf{p}, k) \right) \beta_a(\mathbf{k}) e^{-ik_0 t_{\infty}} \end{aligned} \quad (64)$$

と書ける。

第2節の最後に述べたように、われわれの目的である拡散流密度 $\langle J_l(x) \rangle$ は、このようにして得られた $S_{\alpha\beta}(\mathbf{p}, k)$ を用いて書き表わすことができる。

式(22)の逆 Fourier 変換を、(21)に代入すると、表式

$$\langle J_l(x) \rangle = 2(2\pi)^{-8} \text{Im} \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \int d\mathbf{p} \frac{p_l}{m} \hat{S}_{11}(\mathbf{p}, k) \quad (65)$$

が得られる。

最後に、上に求めた $\langle J_l(x) \rangle$ が連続の方程式をみたすことを確かめる。

4. 連続の方程式の確認

$$\text{粒子密度の演算子 } \rho(x) = \phi_1^\dagger(x) \phi_1(x) \quad (66)$$

の平均値は、上と同様にして、“グリーン関数” $S_{\alpha\beta}(x, y)$ を用いて次のように書ける：

$$\langle \rho(x) \rangle = \rho_0 + 2\text{Im} S_{11}(x, x)$$

$$= \rho_0 + 2(2\pi)^{-8} \text{Im} \int dk e^{ikx} \int d\mathbf{p} S_{11}(\mathbf{p}, k). \quad (67)$$

ここで、 ρ_0 は熱平衡状態 $|\beta\rangle$ での密度、

$$\rho_0 = \langle \beta | \rho^H(x) | \beta \rangle = \int dk 1 / (e^{\beta \epsilon_k} + 1)$$

であり、 x に依存しない定数である。

したがって、巨視的な流れに対する連続の方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \rho(x) \rangle + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle J_i(x) \rangle = 0.$$

は、 $S_{\alpha\beta}(\mathbf{p}, k)$ を使うと

$$-2(2\pi)^{-8} \text{Im} \left[i \int dk e^{ikx} \int d\mathbf{p} \left(k_0 - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}}{m} \right) \hat{S}_{11}(\mathbf{p}, k) \right] = 0, \quad (68)$$

と書ける。

以下、われわれの求めた解(64)が、この式をみたすことを示す。

そのために、まず、 $H_{\pm}(\mathbf{p}, k)$ の定義式(59)から直ちに導かれる等式

$$\left(k_0 - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}}{m} \right) H_{\pm}(\mathbf{p}, k) = 2\pi i \mp 2i\gamma H_{\pm}(\mathbf{p}, k) \quad (69)$$

に着目しよう。

式(61)の $\alpha = \beta = 1$ の成分をとると、

$$h_{11}^{(\pm)}(\mathbf{p}, k) = -\frac{1}{2} H_{\pm}(\mathbf{p}, k).$$

したがって、式(64)の両辺に、 $(k_0 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{p}/m)$ をかけて、(69)に注意すると、

$$\begin{aligned} & \left(k_0 - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}}{m} \right) \hat{S}_{11}^{(\pm)}(\mathbf{p}, k) \\ &= - \left[\pi i \mp i\gamma H_{\pm}(\mathbf{p}, k) \right] \left(\sum_n I_{\pm}^{(n)}(\mathbf{p}, k) \right) \beta_a(\mathbf{k}) e^{-ik_0 t_{\infty}} \end{aligned} \quad (70)$$

が得られる。両辺を \mathbf{p} で積分すると、

$$\begin{aligned} & \int d\mathbf{p} \left(k_0 - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}}{m} \right) \hat{S}_{11}^{(\pm)}(\mathbf{p}, k) = -\pi i \beta_a(\mathbf{k}) e^{-ik_0 t_{\infty}} \\ & \times \left\{ \sum_n \int d\mathbf{p} I_{\pm}^{(n)}(\mathbf{p}, k) \mp \frac{\gamma}{\pi} \sum_n \int d\mathbf{p} H_{\pm}(\mathbf{p}, k) I_{\pm}^{(n)}(\mathbf{p}, k) \right\}. \end{aligned} \quad (80)$$

一方で、 $I_{\pm}^{(n)}$ をきわめる漸化式(63)の両辺を \mathbf{p} で積分し、 γ の定義(49)に注意すると、

$$\int d\mathbf{p} I_{\pm}^{(n)}(\mathbf{p}, k) = \pm \frac{\gamma}{\pi} \int d\mathbf{p} H_{\pm}(\mathbf{p}, k) I_{\pm}^{(n-1)}(\mathbf{p}, k), \quad n \geq 1$$

となる。\$n\$ についての和をとると、

$$\sum_n \int d\mathbf{p} I_{\pm}^{(n)}(\mathbf{p}, k) - \int d\mathbf{p} g(\mathbf{p}) = \pm \frac{\gamma}{\pi} \sum_n \int d\mathbf{p} H_{\pm}(\mathbf{p}, k) I_{\pm}^{(n)}(\mathbf{p}, k).$$

したがって、(80)の右辺の \$\{\dots\}\$ の中は \$\{\dots\} = \int d\mathbf{p} g(\mathbf{p})\$ となり、(80)は

$$\int d\mathbf{p} \left(k_0 - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}}{m} \right) \hat{S}_{11}(\mathbf{p}, k) = -\pi i \beta_a(\mathbf{k}) e^{-ik_0 t_{\infty}} \int d\mathbf{p} g(\mathbf{p})$$

と書ける。この式を(68)の左辺に代入すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \rho(x) \rangle + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle J_i(x) \rangle = c(x) \delta(t + t_{\infty}),$$

$$c(x) = -(2\pi)^{-6} \int d\mathbf{p} g(\mathbf{p}) \int d\mathbf{k} \beta_a(\mathbf{k}) \sin \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$$

となり、\$t \rightarrow -t_{\infty}\$ では、連続の方程式が成りたっていることがわかる。

最後に、学習院大学の江沢洋教授と明星大学の渡辺敬二教授との議論に負うところが大きかったことを記して、お二人に感謝します。

文 献

- 1) H. Umezawa, H. Matsumoto and M. Tachiki: *Thermo Field Dynamics and Condensed States* (North-Holland, Amsterdam, 1982).
- 2) H. Ezawa: *Progress in Quantum Field Theory* eds. H. Ezawa and S. Kamefuchi (North-Holland, Amsterdam, 1986) p. 305.