

磁気単極子のつくる磁場の中での荷電粒子の運動

メタデータ	言語: jpn 出版者: 明治大学教養論集刊行会 公開日: 2009-04-15 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 中村, 孔一 メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/10291/4944

磁気単極子のつくる磁場の中での 荷電粒子の運動

中 村 孔 一

標準的な電磁気学の教科書によると、電荷は存在するが、磁荷は存在しない。この意味で、電気と磁気は非対称である。

しかし、磁荷の存在を、理論形式だけから排除することはできない。むしろ、磁荷が存在するほうが、形式的にはより対称性の高い理論ができる。実際に、磁気単極子を検出しようという試みは、昔から多勢の人達によって行われてきた。特に近年、素粒子の相互作用を統一的に記述しようとする“大統一理論”が、磁気単極子の存在を予言したことから、それを検出するためのさまざまな実験が世界中で行われている。現在までのところ、存在を示す確定的な結果は、どこでも出ていない。しかし、いずれにしても、磁荷が存在しないことは、“今までのところ、存在が確認されていない”という意味での“経験的な”事実と考えるべきであろう。

この小論では、磁気単極子のつくる磁場の中での荷電粒子の運動を古典力学的に議論する。

荷電粒子を点電荷と考えたときの運動が解析的に解けることはよく知られている。しかし、粒子が点電荷の場合には、磁気単極子のまわりの電磁場の角運動量が、単極子の位置で特異性をもち、荷電粒子が単極子の位置を通過するような運動では、角運動量の保存則が破れているように見える。

このパラドックスは、上記の場の角運動量の特異性に起因する。そこで、荷

電粒子に拡がりをもたせて、場の角運動量の特異点を取り除けば、パラドックスは解消すると予想される。実際にそうなっていることを、具体的な計算によって示すことが、この小論の目的である。

この論文では、荷電粒子を、質量も電荷も一様に分布した有限の半径の剛体球と考えて、その運動を議論し、上記のような場合にも、確かに角運動量が保存されていることを示す。この場合には、粒子は自転角運動量をもち、その変化が場の角運動量の変化を相殺して、角運動量の保存を保証している。

第1章では、点電荷の運動を述べ、併せて問題の所在を示す。第2章では、拡がった粒子の場合を論ずる。特に、直線運動の場合の角運動量の変化をくわしく示す。

以下の議論の一部は、学習院大学理学部の建脇真知子さんとの協同研究に依っています。

1 点電荷の運動

1-1 運動方程式

磁荷 g をもつ磁気単極子（以下、モノポールと呼ぶ）が原点に静止しているとして、それがつくる磁場の中での点電荷の運動を議論する。点電荷の電荷を e 、質量を m とする。

点 r にモノポールがつくる磁場は

$$\mathbf{H} = g \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (1)$$

であるから、点電荷の位置を $r(t)$ とすると、それにはたらく力 (Lorentz 力) は

$$\mathbf{F} = \frac{e}{c} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{H} = \frac{ge}{c} \frac{1}{r^3} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{r} \quad (2)$$

となる。ただし、 c は真空中の光速を表わす。したがって、点電荷の運動方程式は

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{ge}{c} \frac{1}{r^3} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{r} \quad (3)$$

と書ける。

この式から、直ちに、いくつかの保存則を導くことができる。

1-2 保存則

(i) エネルギー保存則

式(2)の力 \mathbf{F} は、 $d\mathbf{r}/dt$ と直交している。したがって、式(3)の両辺と $d\mathbf{r}/dt$ との内積をとると、

$$m \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = 0.$$

したがって、

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 = E \quad (\text{一定}) \quad (4)$$

となる。磁場が点電荷におよぼす力は仕事をしないから、運動エネルギーが保存するわけである。

(ii) 角運動量保存則

式(3)の両辺と \mathbf{r} との外積をとると、

$$\text{左辺} = m\mathbf{r} \times \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m \frac{d}{dt} \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right),$$

$$\text{右辺} = \frac{ge}{c} \frac{1}{r^3} \mathbf{r} \times \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{r} \right) = \frac{ge}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right)$$

となる。これから直ちに、保存則

$$m\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \frac{ge}{c} \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{J} \quad (\text{一定}) \quad (5)$$

が導かれる。これは角運動量の保存則に他ならない。第1項は、粒子の原点のまわりの軌道角運動量であり、第2項は、電磁場の角運動量になっている。このことは、次のようにして確かめられる。点 \mathbf{r} にある点電荷が、点 $\mathbf{r} + \mathbf{x}$ につくる電場は

$$\mathbf{E} = e \frac{\mathbf{x}}{x^3}. \quad (6)$$

同じ点にモノポールがつくる磁場は

$$\mathbf{H} = g \frac{\mathbf{r} + \mathbf{x}}{|\mathbf{r} + \mathbf{x}|^3} \quad (7)$$

である。したがって、点 $\mathbf{r} + \mathbf{x}$ における場の運動量密度 (=Poynting ベクトル/ c^2) は

$$\mathbf{P} = \frac{1}{4\pi c} \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{ge}{4\pi c} \frac{\mathbf{x} \times (\mathbf{r} + \mathbf{x})}{x^3 |\mathbf{r} + \mathbf{x}|^3}$$

となり、角運動量密度は

$$\mathbf{\Lambda} = (\mathbf{r} + \mathbf{x}) \times \mathbf{P}$$

と書ける。これを、 \mathbf{x} について全空間で積分すると、電磁場の角運動量が得られる：

$$\lambda = \int d\mathbf{x} \mathbf{\Lambda} = -\frac{ge}{c} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (8)$$

確かに、これは、式 (5) の第2項に一致している。

電磁場の角運動量 λ は、 \mathbf{r} に平行であるから、粒子の軌道角運動量 $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times d\mathbf{r}/dt$ とは常に直交している。このことに注意して、保存量 \mathbf{J} の2乗を求めると、

$$J^2 = L^2 + \left(\frac{ge}{c}\right)^2 \quad (9)$$

となり、軌道角運動量の大きさ L も保存することがわかる。

(iii) 加速度と動径ベクトルの直交性

式 (2) の力 \mathbf{F} は、常に、動径ベクトル \mathbf{r} と直交している。したがって、粒子の加速度も \mathbf{r} と直交している：

$$\mathbf{r} \cdot \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = 0, \quad (10)$$

1-3 点電荷の軌道

点電荷の運動の様子を知るには、初期条件

$$r(0) = r_0, \quad \left. \frac{dr}{dt} \right|_{t=0} = v_0 \quad (11)$$

のもとで、運動方程式 (3) を解けばよい。

とりあえず、 $L = m|r_0 \times v_0| \neq 0$ として話をすすめる。 $L=0$ 、すなわち、 r_0 と v_0 が平行な場合の運動については、別に議論する。

保存量 J に平行に z 軸をとり、点電荷の位置を極座標 (r, θ, φ) で表わすことにする。

式 (5) の両辺と r との内積をとると、

$$J \cdot r = Jr \cos \theta = -\frac{ge}{c}r,$$

すなわち、

$$\cos \theta = -\frac{ge}{cJ} \quad (12)$$

となり、粒子は、 J に平行な軸をもち、頂角が $\theta = \arccos(-ge/cJ)$ の円錐面上を運動することがわかる (正確にいえば、 $ge > 0$ の場合には、 $\theta > \pi/2$ となり、 $\pi - \theta$ を頂角とする円錐面になる)。

また、式 (9) と (12) より、軌道角運動量の大きさ L について、

$$L = \sqrt{J^2 - (ge/c)^2} = J \sin \theta \quad (13)$$

という関係式が得られる。

次に r の時間変化を調べてみよう。 $r^2 = r \cdot r$ を時間で 2 回微分すると、

$$\frac{d^2 r^2}{dt^2} = 2r \cdot \frac{d^2 r}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \cdot \frac{dr}{dt}.$$

右辺の第 1 項は、式 (10) によりゼロ。第 2 項は、式 (4) より $4E/m$ となる。したがって

$$\frac{d^2 r^2}{dt^2} = \frac{4E}{m}. \quad (14)$$

初期条件 (11) のもとでは、

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2, \quad \left. \frac{dr^2}{dt} \right|_{t=0} = 2r_0 \cdot v_0$$

となることに注意して、方程式 (14) を積分すると

$$r(t) = \sqrt{v_0^2 t^2 + 2 \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_0 t + r_0^2} \quad (15)$$

となり、 r が時間の関数として求まる。この式がモノポールの磁荷や粒子の電荷に依存しないことは面白い。

次に φ の時間依存性を調べる。軌道角運動量 $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times d\mathbf{r}/dt$ の z 成分を極座標で書くと、

$$L_z = m r^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{dt} \quad (16)$$

となる。一方、 J 方向に z 軸をとったことを思い出すと、 L_z は

$$L_z = \frac{\mathbf{L} \cdot \mathbf{J}}{J} = \frac{L^2}{J} = J \sin^2 \theta \quad (17)$$

と書ける (式 (13) を使った)。この式と式 (16) をくらべると、 φ についての微分方程式

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{J}{m r^2}$$

が得られる。式 (15) を代入すると、

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{J}{m} \frac{1}{v_0^2 t^2 + 2 \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_0 t + r_0^2}, \quad (18)$$

\mathbf{J} と \mathbf{r}_0 を含む面内に x 軸をとることにすると、 $\varphi(0) = 0$ 。この初期値のもとに、式 (18) を積分すると、

$$\varphi(t) = \frac{J}{L} \left\{ \arctan \frac{v_0^2 t + \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_0}{|\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0|} - \arctan \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_0}{|\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0|} \right\} \quad (19)$$

となり、 φ が時間の関数として求まる。

\mathbf{r}_0 と \mathbf{v}_0 のなす角を χ とすると

$$\frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_0}{|\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0|} = \cot \chi = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \chi \right)$$

であるから、式 (13) を考慮して、式 (19) は

$$\frac{v_0^2 t + \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_0}{|\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0|} = \tan \left(\sin \theta \varphi(t) + \frac{\pi}{2} - \chi \right) = -\cot(\sin \theta \varphi(t) - \chi)$$

と書き換えられる。両辺を 2 乗して、式 (15) に注意すること

$$\frac{v_0^2}{|\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0|^2} r^2(t) - 1 = \cot^2(\sin \theta \varphi(t) - \chi).$$

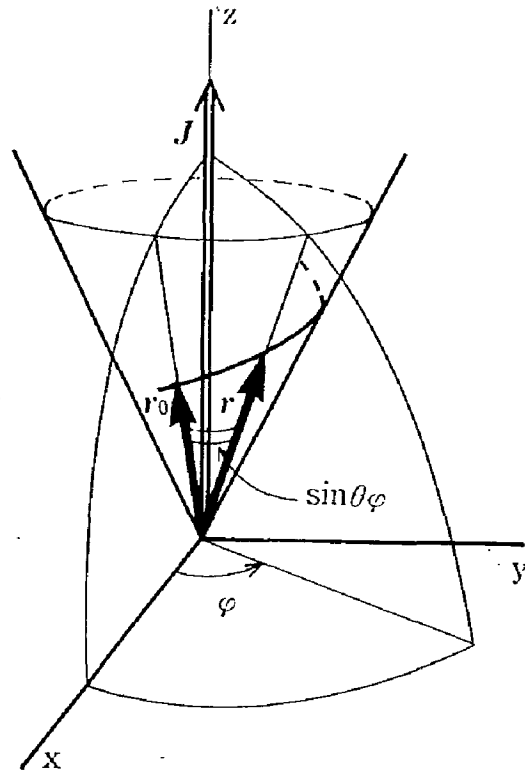


図-1 粒子は、 J 方向を軸とした円錐面上を運動する。

したがって、 r と φ の間に

$$r(t) \sin [\chi - \sin \theta \varphi(t)] = r_0 \sin \chi \quad (20)$$

という関係式が成り立つ。

この関係式は、次のような幾何学的な意味をもっている。先に述べたように、粒子は、 J 方向を軸とした、頂角 $\theta = \arccos(-ge/cJ)$ の円錐面上を運動する。このとき、動径ベクトル $r(t)$ が錐面上を掃く角度が $\sin \theta \varphi(t)$ である(図-1)。いいかえると、錐面を展開した面上で、 r_0 と $r(t)$ のなす角が $\sin \theta \varphi(t)$ になる。 χ は r_0 と v_0 のなす角であったから、 $\chi - \sin \theta \varphi(t)$ は、 v_0 と $r(t)$ のなす角である。したがって、式(20)の右辺が t によらない定数であることは、 $r(t)$ の先端が、展開面上で v_0 の延長線上にあることを意味している(図-2)。粒子は、展開面上の直線、すなわち、錐面上の測地線に沿って運動するわけである。

粒子がモノポールに最も近づくのは、

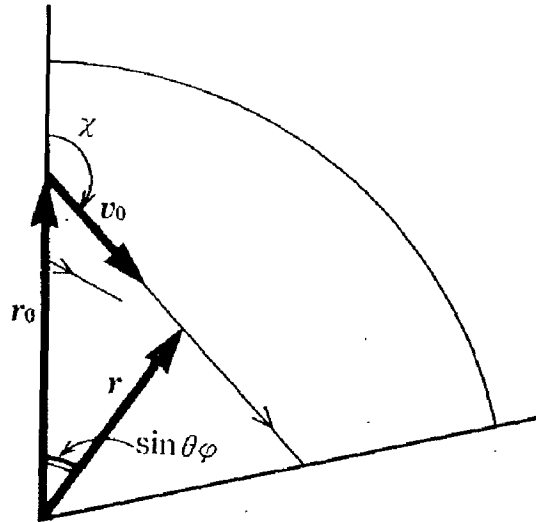


図-2 円錐面を展開した面の上での粒子の軌道

$$t = -\frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_0}{v_0}$$

のときであり，そのときの r は

$$r_{\min} = \frac{|\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0|}{v_0} = r_0 \sin \chi \quad (21)$$

である。 r_{\min} が上の値になることは，図-2 から明らかである。

点電荷は円錐面に巻きつきながら，モノポールに近づき， r_{\min} まで近づくと，

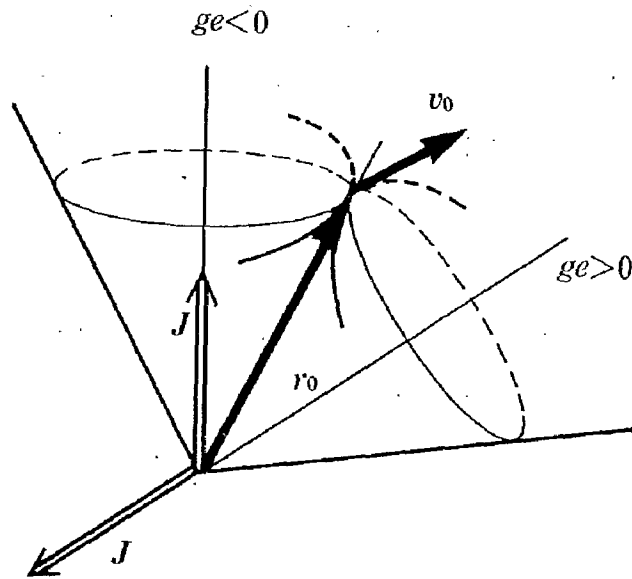


図-3 ge の符号による運動の違い。

同じように円錐面に巻きつきながら遠ざかっていく。

式 (18) の右辺は、モノポールの磁荷や粒子の電荷の符号によらず正であり、角度 φ は時間とともに単調に増大する。このことは、粒子が円錐面に巻きつく向きが、常に、 \mathbf{J} 方向に進む右ネジの回転方向と同じになっていることを意味している。しかし、式 (12) に見られるように、 ge の符号によって、 r_0 に対する \mathbf{J} の方向は異なるので、同じ初期条件から出発しても ge の符号によって運動の様子は違ってくる (図-3)。

1-4 直線運動の場合

初速度 v_0 が動径ベクトルに平行、あるいは反平行な場合を考えてみよう。時刻 $t=0$ で、 $L=0$ であるが、 L の大きさが保存することから、 L は常にゼロのままである。いいかえると、粒子の速度は常に動径ベクトルと平行か反平行である。したがって、式 (3) の右辺はゼロとなり、粒子は等速直線運動をする。たとえば、 \mathbf{k} を空間に固定されたある単位ベクトルとして、

$$\mathbf{r}_0 = r_0 \mathbf{k}, \quad \mathbf{v}_0 = -v_0 \mathbf{k}$$

とすると、

$$\mathbf{r}(t) = (-v_0 t + r_0) \mathbf{k}$$

となる。これが運動方程式 (3) と初期条件 (11) をみたすことは明らかである。

ところが、式 (5) で与えられる \mathbf{J} は、この場合には

$$\mathbf{J} = -\frac{ge}{c} \operatorname{sgn}(-v_0 t + r_0) \mathbf{k} \quad (22)$$

となり、 $-v_0 t + r_0$ の符号によって方向が変わる。粒子が原点を通過する前後で、 \mathbf{J} が不連続的に変化するわけである。すなわち、 \mathbf{J} が保存しないことになる。厳密に言えば、運動方程式 (3) は、 $r=0$ では意味をもたない。したがって、式 (3) から導かれる保存則 “ $\mathbf{J}=\text{一定}$ ” も $r \neq 0$ でしか成り立たない。たしかに、式 (22) で与えられる \mathbf{J} は、原点に到達するまでは不変であり、原点を

通過した後も、別の値ではあるが、一定値をとりつづける。この意味では、式 (22) の J のふるまいに論理的な矛盾はない。しかし、粒子が原点を通過する瞬間に、系の角運動量が突然に変化することは奇妙な感じを与える。

奇妙さの原因は、粒子にはたらく力 F や場の角運動量 λ が、 $r=0$ に特異点をもつことにある。特異性の現れる理由のひとつは、粒子を点電荷と考えたことにある。したがって、粒子に拡がりをもたせれば、こうした特異性も消え、系の角運動量も正しく保存されるだろうと予想される。次にそのことを見てみよう。

2 拡がりをもつ荷電粒子の運動

2-1 運動方程式

前章と同様に、磁荷 g をもつモノポールが原点に静止しているとし、それがつくる磁場の中での荷電粒子の運動を考える。

荷電粒子は、質量も電荷も一様に分布している半径 a の剛体球とする。粒子の全質量を m 、質量密度を ρ_m 、全電荷を e 、電荷密度を ρ_e とする。

粒子の中心の位置ベクトルを r 、粒子の自転角速度ベクトルを ω とすると、粒子内部の点 $r'=r+x$ にある微小要素 dx の速度は

$$\frac{dr'}{dt} = \frac{dr}{dt} + \omega \times x \quad (23)$$

となる。したがって、その部分にはたらく力は

$$dF = \frac{g\rho_e dx}{c} \left(\frac{dr}{dt} + \omega \times x \right) \times \frac{r+x}{|r+x|^3} \quad (24)$$

となる。

粒子の中心 (= 重心) の運動は、方程式

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = F \equiv \int_{|x| \leq a} dF \quad (25)$$

にしたがう。式 (24) を代入し、右辺の積分を実行すると、

$$\mathbf{F} = \begin{cases} \frac{ge}{c} \frac{1}{r^3} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{r} + \frac{ge}{2mc} \frac{1}{r^3} \left(\mathbf{s} - 3 \frac{(\mathbf{s} \cdot \mathbf{r})}{r^2} \mathbf{r} \right), & |r| > a \\ \frac{ge}{c} \frac{1}{a^3} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{r} + \frac{ge}{2mc} \frac{1}{a^5} \{ (6r^2 - 5a^2) \mathbf{s} - 3(\mathbf{s} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r} \}, & |r| < a \end{cases} \quad (26 \cdot 1)$$

$$(26 \cdot 2)$$

となる。ただし、 \mathbf{s} は自転の角運動量

$$\mathbf{s} = \frac{2ma^2}{5} \boldsymbol{\omega} \quad (27)$$

である。式 (26・1) の第1項は、式 (2) の右辺と同じ形をしており、粒子を、中心に全電荷が集中した点電荷とみなしたときの Lorentz 力になっている。第2項は

$$(26 \cdot 1) \text{ の第2項} = \frac{ge}{2mc} \left(\mathbf{s} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

と書き変えることができ、自転にともなう生ずる磁気モーメント

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{2mc} \mathbf{s} \quad (28)$$

が、式 (1) で与えられる磁場の中で受ける力と解釈できる。したがって、 $|r| > a$ では、粒子の重心の運動方程式は、電荷 e と磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}$ をもつ質点の運動方程式と同じになる。しかし、 \mathbf{F} の原点における特異性は、式 (26・2) に見るように、消えている。

自転運動、すなわち、重心のまわりの回転のしたがう運動方程式は

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{N} \equiv \int_{|\mathbf{x}| < a} \mathbf{x} \times d\mathbf{F} \quad (29)$$

で与えられる。式 (24) を代入して、右辺の積分を実行すると、

$$\mathbf{N} = \begin{cases} \frac{ge}{2mc} \frac{\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3} - \frac{ge}{5c} a^2 \frac{1}{r^3} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} - 3 \frac{1}{r^2} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \mathbf{r} \right) \mathbf{r} \right), & |r| > a \\ \frac{ge}{2mc} \frac{6r^2 - 5a^2}{a^5} \mathbf{s} \times \mathbf{r} \end{cases} \quad (30 \cdot 1)$$

$$- \frac{ge}{5c} a^2 \left\{ \frac{6r^2 - 5a^2}{a^5} \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \frac{3}{a^5} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \mathbf{r} \right) \mathbf{r} \right\}, \quad |r| < a \quad (30 \cdot 2)$$

が得られる。

式 (30・1) の第1項は、式 (28) で与えられる磁気モーメント μ が、式 (1) の磁場の中で受けるトルクに他ならない。第2項は、粒子の内部の異なる点での磁場が平行ではないことから生じるトルクであり、本質的に“粒子の拡がり”の効果である。当然この項は、 a をゼロにする極限で (s は有限に留めておいたとしても) 消えてしまう。また、この項がなければ s の大きさは変化しない。いいかえると、第1項で表わされるトルクだけでは、 s の方向は変化するが、大きさは変らない。そのことは、式 (29) の両辺と s との内積をとってみればすぐにわかる。同様のことは、式 (30・2) についてもいえる。式 (30・1) と (30・2) の第2項が s の大きさを変えることが後の議論で重要になる。

まとめると、拡がった粒子の運動は、2つの運動方程式 (25) と (29) で記述される。そこでの力 F とトルク N は、それぞれ、式 (26) と式 (30) で与えられる。力もトルクも $|r| > a$ と $|r| < a$ で異なった表式をもつが、いずれも特異点はない。

これらの運動方程式から、直ちに、エネルギーと角運動量の保存則が導かれる。

2-2 保存則

(i) エネルギー保存則

式 (25) と式 (29) より

$$m \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d^2r}{dt^2} + \omega \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dr}{dt} \cdot F + \omega \cdot N \quad (31)$$

と書ける。右辺の F と N に、式 (26・1) と式 (30・1) を代入すると、それぞれの第1項からの寄与は、それ自身でゼロになる。また、第2項からの寄与は互いに相殺し、結果はゼロになる。したがって、 $|r| > a$ の領域で、全運動エネルギー (自転運動のエネルギーまで含んだ) の保存則

$$\frac{1}{2} m \frac{dr}{dt} \cdot \frac{dr}{dt} + \frac{1}{2} \omega \cdot s = E \quad (\text{一定}) \quad (32)$$

が成りたつ。式 (31) の右辺の F と N に、式 (26・2) と (30・2) を代入しても、やはり上と同じような相殺が起こり、結果はゼロになる。したがって、上の保存則 (32) は、 $|r| < a$ の領域でも成りたっている。

(ii) 角運動量保存則

式 (25) の両辺と r との外積をとると、

$$mr \times \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(mr \times \frac{dr}{dt} \right) = r \times F \quad (33)$$

右辺の F に、式 (26・1) を代入すると

$$r \times F = \frac{ge}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{r}{r} \right) - \frac{ge}{2mc} \frac{s \times r}{r^3}$$

となる。この式の右辺の第2項は、式 (30・1) の右辺の第1項と等しいから

$$\begin{aligned} r \times F &= \frac{ge}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{r}{r} \right) - \frac{ds}{dt} \\ &\quad - \frac{ge}{5c} a^2 \frac{1}{r^3} \left(\frac{dr}{dt} - 3 \frac{1}{r^3} \left(\frac{dr}{dt} \cdot r \right) r \right) \\ &= \frac{ge}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{r}{r} \right) - \frac{ds}{dt} - \frac{ge}{5c} a^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{r}{r^3} \right) \end{aligned}$$

と書ける。したがって、式 (33) より、保存則

$$mr \times \frac{dr}{dt} + s - \frac{ge}{c} \frac{r}{r} + \frac{ge}{5c} a^2 \frac{r}{r^3} = J \quad (\text{一定}) \quad (34)$$

が成りたつ。左辺の第3項は、点電荷の場合にも存在していた項で、電磁場の角運動量と解釈された。しかし、式 (8) を導いた計算は、電荷が拡がっている場合には、正確ではない。

今のモデルでは、点 $r+x$ の電場は

$$E = \begin{cases} e \frac{x}{x^3}, & |x| \geq a \\ e \frac{x}{a^3}, & |x| < a \end{cases}$$

となる。この E を使って、式 (8) の積分を計算しなおすと、

$$\lambda = -\frac{ge}{c} \frac{r}{r} + \frac{ge}{5c} a^2 \frac{r}{r^3}, \quad |r| > a \quad (35 \cdot 1)$$

$$\lambda = -\frac{ge}{c} \frac{r}{a} + \frac{ge}{5c} \frac{r^2 r}{a^3}, \quad |r| < a \quad (35 \cdot 2)$$

が得られる。式 (35・1) を見ると、式 (34) は

$$L + s + \lambda = J \quad (36)$$

と書け、粒子の軌道角運動量と自転角運動量に電磁場の角運動量を合せた全角運動量の保存則を表わしていることがわかる。

同じように、式 (33) の右辺の F に、式 (26・2) を代入し、式 (30・2) に注意すると、

$$r \times F = -\frac{ds}{dt} + \frac{ge}{c} \frac{1}{a} \frac{dr}{dt} - \frac{ge}{5c} \frac{1}{a^3} \frac{d}{dt}(r^2 r)$$

が得られ、保存則

$$mr \times \frac{dr}{dt} + s - \frac{ge}{c} \frac{r}{a} + \frac{ge}{5c} \frac{r^2 r}{a^3} = J \quad (\text{一定})$$

が導かれる。式 (35・2) を見ると、この式は、式 (36) を $|r| < a$ の領域に延長したものになっている。式 (35・2) によれば、 $r=0$ で λ はゼロになり、前章の最後で問題にした λ の特異性は消えている。したがって、式 (36) で表わされる保存則は、 $r=0$ も含めて全域で成りたっていると考えてよい。

s の方向が変化するし、 λ の大きさも変わるので、点電荷の場合と違って、 J と r の間の角度 θ は一定ではない。そのため、このモデルでは、一般の初期条件に対して、粒子の軌道を解析的に求めることはできない。

そこで、以下では直線運動という特別な場合に議論を限り、前章の終りの部分で述べた“角運動量の突然の跳び”という問題が、このモデルで、どのように解決されるかを見てみよう。

2-3 直線運動

k を空間に固定されたある単位ベクトルとし、

$$r = zk, \quad s = sk \quad (37)$$

とすると、式 (26) の F と式 (30) の N は、ともに k 比例する。したがっ

て、運動方程式 (25) と (29) は、式 (37) の形の解、すなわち、 k を含む直線に沿った運動という解をもつ。

この場合に、運動方程式 (25) と (29) は

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = \begin{cases} -\frac{\sigma}{m} \frac{s}{|z|^3}, & |z| > a \\ \frac{\sigma}{2m} \frac{1}{a^5} (3z^2 - 5a^2)s, & |z| < a \end{cases} \quad (38)$$

$$\frac{ds}{dt} = \begin{cases} \frac{2\sigma}{5} a^2 \frac{1}{|z|^3} \frac{dz}{dt}, & |z| > a \\ -\frac{\sigma}{5} \frac{1}{a^3} (3z^2 - 5a^2) \frac{dz}{dt}, & |z| < a \end{cases} \quad (39)$$

と書ける。ただし、 $\sigma \equiv ge/c$ 。この方程式は直ちに解けて、

$$s(z) = \begin{cases} s_\infty - \frac{\sigma}{5} \frac{a^2}{z^2}, & z > a \\ s_\infty - \frac{\sigma}{5} \left(5 - 5 \frac{z}{a} + \frac{z^3}{a^3} \right), & |z| < a \\ s_\infty - 2\sigma + \frac{\sigma}{5} \frac{a^2}{z^2}, & z < -a \end{cases} \quad (40)$$

となる。ただし、 $s(+\infty) = s_\infty$ とした。

s は z とともに単調に変化して、 $z = +\infty$ から $z = -\infty$ に行く間に、 $-2\sigma = -2ge/c$ だけ変る。しかも、 s の変化の大部分は、 $a > z > -a$ の範囲で起っている。 a をゼロに近づけていくと、 $s(z)$ は階段関数に近づいていく。この s の変化が、前章の終りで述べた“ λ の跳び”を相殺してくれるのである。そのことは保存則 (36) から明らかであるが、直接に確かめてみることもできる。

式 (35) の r に、 $r = zk$ を代入すると、

$$\lambda(z) = \begin{cases} \left(-\sigma + \frac{\sigma}{5} \frac{a^2}{z^2} \right) k, & z > a \\ \left(-\sigma \frac{z}{a} + \frac{\sigma}{5} \frac{z^3}{a^2} \right) k, & |z| < a \\ \left(\sigma - \frac{\sigma}{5} \frac{a^2}{z^2} \right) k, & z < -a \end{cases} \quad (41)$$

となる。

$$\lambda(+\infty) - \lambda(-\infty) = -2\sigma k$$

であり、しかも、 a をゼロに近づけると、 λ の z 依存性は階段関数的になる。これは、点電荷の場合の λ のふるまいと一致している。

式 (40) と式 (41) を見くらべると、確かに、 $s(z)$ の変化と λ の変化が相殺し、常に

$$s(z)k + \lambda = (s_\infty - \sigma)k$$

が成りたっていることがわかる。系の角運動量を完全に保存させるためには、粒子に拡がりをもたせて、自転の自由度を導入することが必要なのである。

最後に、直線運動する粒子の受ける力を z の関数として求めておこう。エネルギー保存則 (32) は今の場合

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + \frac{5}{4ma^2}s^2(z) = E \quad (42)$$

と書ける。したがって、粒子の運動は、ポテンシャル

$$V(z) = \frac{5}{4ma^2}s^2(z) \quad (43)$$

のもとでの質量 m の質点の一次元運動と同じになる。あるいは、粒子の受ける力で書けば

$$F(z) = -\frac{5}{2ma^2}s(z)\frac{d}{dz}s(z) \quad (44)$$

となる。当然であるが、この力は、式 (38) の右辺を式 (40) の結果を使って書きかえることでも得られる。

式 (40) より、 σ を正とすると、 ds/dz は常に正であるから、 s が負になると F は正になる。もし s_∞ が σ より小さいと、 $z > 0$ で s が負になる領域が存在する。したがって、この場合には、 z の正の側からモノポールに向かって走ってきた粒子は、原点に到達する以前に、モノポールからの反撥力を受け始める。例として、 $s_\infty = \sigma/2$ の場合の $V(z)$ のグラフを図-4 に示す。図から容易にわかるように、この場合には、 z の正の側から負の方向に向って走る粒子は、原点の近くで強い逆向きの力を受ける。もし、 $z = +\infty$ での運動エネルギーが

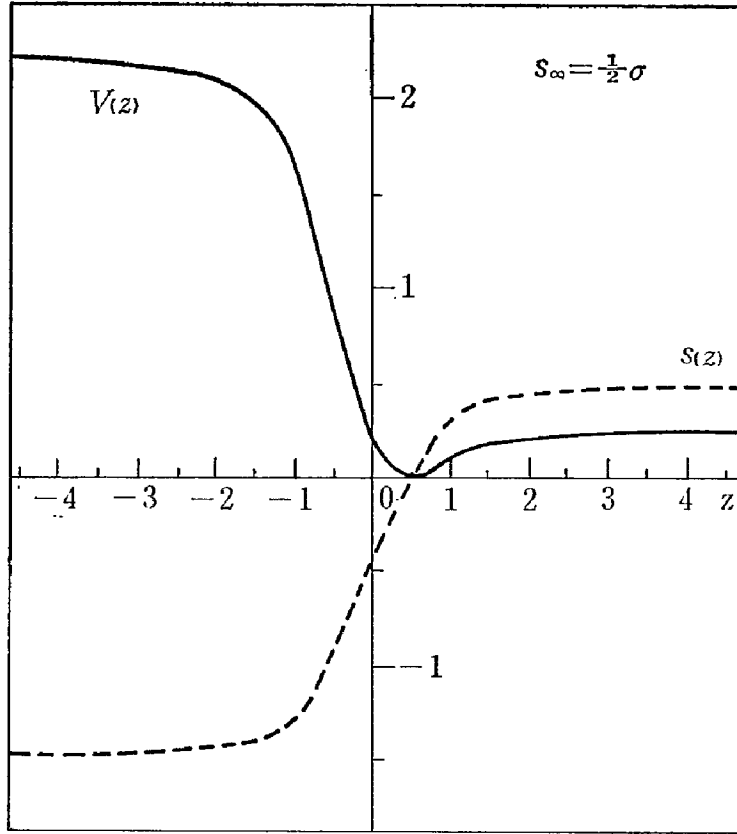


図-4 $s_\infty = \sigma/2 \equiv ge/2c$ のときの、自転角運動量の大きさ $s(z)$ とポテンシャル・エネルギー $V(z)$ のグラフ。
横軸は a を単位とした z , $s(z)$ と $V(z)$ の単位は、
それぞれ, $\sigma \equiv ge/c$ と $5\sigma^2/4ma^2$ にとってある。

$5\sigma^2/2ma^2$ より小さいと、粒子は途中で押し戻されてしまい、更び z の正の方向に飛び去ってしまうことになる。

このような粒子のふるまいも、自転運動の効果であって、粒子を点電荷としたときには見られなかったことである。

以上の考察から、次のような結論を得ることができる。磁気単極子のつくる磁場の中での荷電粒子の古典力学的運動を矛盾なく記述するためには、粒子の自転運動の自由度を正確にとり入れなければならない。しかし、そうすると、自転にともなって粒子は磁気モーメントをもつことになり、粒子の受ける力は単純な Lorentz 力だけではなく、それに、磁気モーメントが磁場中で受ける力が加わることになる。