ナビヤ,ストークス流体運動式の一解法に就て(第2報)

4.10 ナビヤ，ストークスの流体運動式の一解法に就て（第二報）

片 岡 正 治

On a Solution of Navier-Stoke's Equation of Fluid Motion (Ⅱ)

Masaharu Kataoka

SYNOPSIS

In his first report the author fouud that the method how to find the term Y of fluctuation in the turbulent boundary layer was incurrect. So in this report will be geven another method considered to be correct at present. By this method only the form of Y will be changed and the other part in the first report will not be altered. The frictional resistance coefficients of a plate placed in air and water were calculated, taking the effect of the length and suiface roughness of the plate into account.

Ⅰ 亂流境界層に於ける振動項

第1報[1] 中乱流境界層に於ける振動項 Y の求め方が不適当であることが分つたので次のように訂正する。唯 Y の形が変るだけでその外には別に変化はない。

3. $M=\gamma_1$ の場合（第1報77頁）

Y の微分方程式は，

$$\frac{\partial Y}{\partial t}=-\frac{1+\gamma}{12x}(1-3Y),\quad \frac{\partial Y}{\partial x}=-\frac{1+\gamma}{x}Y \tag{3.16}$$

である。

$$\frac{\partial^3 Y}{\partial t^3}=\frac{(1+\gamma)^2}{(4x)^2}\frac{\partial Y}{\partial t},\quad \frac{\partial^2 Y}{\partial t\partial x}=-\frac{1+\gamma}{x}\frac{\partial Y}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^3 Y}{\partial t\partial x^2}=\frac{(1+\gamma)(2+\gamma)}{x^2}\frac{\partial Y}{\partial t}$$

であるから

$$\frac{4^2}{(1+\gamma)^2}\frac{\partial^3 Y}{\partial t^3}=\frac{1}{(1+\sigma)^2}\left(\frac{\partial^3 Y}{\partial t\partial x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial^2 Y}{\partial t\partial x}\right)$$

となる。

$J_0(x)$，$H_0(x)$ を零次のベッセル函数とし，

$Y=0,\quad t=0$ に対し

として解けば，

$$Y=\sum_{n=1}\{a_n J_0((1+\gamma)\alpha_n x)+b_n H_0((1+\gamma)\alpha_n x)\}\sin\frac{1+\gamma}{4}\alpha_n t$$

となる。

$H_0((1+\gamma)\alpha_n x)=0 \qquad x=x_0$ に対し

とし $x_n(n=1,2,3,\ldots\ldots)$ を $H_0(x)$ の零点とすれば，

$$\alpha_n=\frac{x_n}{(1+\gamma)x_0}$$

となる。

$\dfrac{\partial Y}{\partial x}=-(1+\gamma)Y \qquad x=1$ に対し

とすれば

$$\sum_{n=1}[a_n\{\alpha_n J_0'((1+\gamma)\alpha_n)+J_0((1+\gamma)\alpha_n)\}+b_n\{\alpha_n H_0'((1+\gamma)d_n)+H_0((1+\gamma)\alpha_n\}]\sin\frac{1+\gamma}{4}\alpha_n t=0$$

となる。故に

$$b_n=-\frac{\alpha_n J_0'((1+\gamma)\alpha_n)+J_0((1+\gamma)\alpha_n)}{\alpha_n H_0'((1+\gamma)\alpha_n)+H_0((1+\gamma)\alpha_n)}a_n$$

となる。

$x_0\leqq\beta_m\leqq 1$ とし

$\dfrac{\partial Y}{\partial t}=-\dfrac{1+\gamma}{12\beta_m} \qquad t=0,\ x=\beta_m$ に対し

とすれば

$$\sum_{n=1}\alpha_n a_n\{J_0((1+\gamma)\alpha_n\beta_m)-\frac{\alpha_n J_0'((1+\gamma)\alpha_n)+J_0((1+\gamma)\alpha_n)}{\alpha_n H_0'((1+\gamma)\alpha_n)+H_0(1+\gamma)\alpha_n)}\times H_0((1+\gamma)\alpha_n\beta_m)=-\frac{1}{3\beta_m}$$

(1) 明大工研究報告 1 (1950).

となる。

N 箇の β_m の値をとり $n>N$ に対し $a_n=0$ とすれば，N 箇の a_n に関する連立一次方程式が得られる。これから a_n の値を求める事ができる。

$0\leqq x\leqq x_0$ に対しては

$$Y=\sum_{n=1} a_n J_0((1+\gamma)\alpha_n x)\sin\frac{1+\gamma}{4}\alpha_n t$$

とする。

$x\geqq 1$ に対しては

$$\bar{Y}=x^{-(1+\gamma)}\sum_{n=1}\bar{a}_n\sin\frac{1+\gamma}{4}\alpha_n t$$

と置き

$Y=\bar{Y}\qquad x=1$ に対し

とすれば

$$\bar{a}_n=a_n\{J_0((1+\gamma)\alpha_n)-\frac{\alpha_n J_0'((1+\gamma)\alpha_n)+J_0((1+\gamma)\alpha_n)}{\alpha_n H_0'((1+\gamma)\alpha_n)+H_0((1+\gamma)\alpha_n)}\times H_0((1+\gamma)\alpha_n)\}$$

となる。

4. $M=y_1^{\frac{1}{2}}$ の場合（第1報79頁）

同様にして $x_0\leqq x\leqq 1$ に対しては

$$Y=\sum_{n=1} a_n\{J_0((1+\gamma)\alpha_n)-\frac{\alpha_n J_0'((1+\gamma)\alpha_n)+J_0((1+\gamma)\alpha_n)}{\alpha_n H_0'((1+\gamma)\alpha_n)+H_0((1+\gamma)\alpha_n)}\times H_0((1+\gamma)\alpha_n x)\}\sin\frac{1+\gamma}{5}\alpha_n t$$

となり，a_n は

$$\sum_{n=1}\alpha_n a_n\{J_0((1+\gamma)\alpha_n\beta_m)-\frac{\alpha_n J_0'((1+\gamma)\alpha_n)+J_0((1+\gamma)\alpha_n)}{\alpha_n H_0'((1+\gamma)\alpha_n)+H_0((1+\gamma)\alpha_n)}\times H_0((1+\gamma)\alpha_n\beta_m)\}=-\frac{1}{4\beta_m}$$

により定められる。

$0\leqq x\leqq x_0$ に対しては

$$Y=\sum_{n=1} a_n J_0((1+\gamma)\alpha_n x)\sin\frac{1+\gamma}{5}\alpha_n t$$

$x\geqq 1$ に対しては

$$\bar{Y}=x^{-(1+\gamma)}\sum_{n=1}\bar{a}_n\sin\frac{1+\gamma}{5}\alpha_n t,$$

$$\bar{a}_n=a_n\{J_0((1+\gamma)\alpha_n)-\frac{\alpha_n J_0'((1+\gamma)\alpha_n)+J_0((1+\gamma)\alpha_n)}{\alpha_n H_0'((1+\gamma)\alpha_n)+H_0((1+\gamma)\alpha_n)}\times H_0((1+\gamma)\alpha_n)\}$$

となる。

II 摩擦抵抗

動粘性係数及び音速が

$$\frac{\mu}{\rho}=1.440\times10^{-5}\,\mathrm{m^2/sec},\quad a=340.8\,\mathrm{m/sec}$$

のとき，長さ L_m 及び γ を種々変化した場合の空気中に於ける平面板の摩擦抵抗係数を求めれば次の様になる。

L \ γ		0.8				0.4			
0.5	V	1.044×10^{-1}	1.951	1.893×10	9.650×10	1.184×10^{-1}	2.122	2.016×10	9.842×10
	R	3.627×10^{3}	6.778×10^{4}	6.658×10^{5}	4.490×10^{6}	4.112×10^{3}	7.370×10^{4}	7.002×10^{5}	3.429×10^{6}
	C_x	2.153×10^{-3}	4.243×10^{-3}	5.813×10^{-3}	4.494×10^{-3}	3.477×10^{-3}	5.650×10^{-3}	7.224×10^{-3}	5.545×10^{-3}
1	V	7.383×10^{-2}	1.549	1.648×10	9.061×10	8.372×10^{-2}	1.684	1.755×10	9.241×10
	R	5.129×10^{3}	1.059×10^{5}	1.159×10^{6}	6.294×10^{6}	5.815×10^{3}	1.170×10^{5}	1.219×10^{6}	6.440×10
	C_x	2.153×10^{-3}	4.243×10^{-3}	5.550×10^{-3}	4.132×10^{-3}	3.477×10^{-3}	5.650×10^{-3}	6.898×10^{-3}	5.098×10^{-3}
2	V	5.221×10^{-2}	1.229	1.435×10	8.508×10	5.970×10^{-2}	1.337	1.528×10	8.676×10
	R	7.253×10^{3}	1.708×10^{5}	2.018×10^{6}	1.182×10^{7}	8.224×10	$^{3}1.857\times10^{5}$	2.123×10^{6}	1.209×10^{7}
	C_x	2.153×10^{-3}	4.243×10^{-3}	5.299×10^{-3}	3.799×10^{-3}	3.477×10^{-3}	5.650×10^{-3}	6.587×10^{-3}	4.687×10^{-3}
4	V	3.693×10^{-2}	9.757×10^{-1}	1.249×10	7.988×10	4.186×10^{-2}	1.061	1.330×10	8.146×10
	R	1.026×10^{4}	2.711×10^{5}	3.514×10^{6}	2.220×10^{7}	1.163×10^{4}	2.948×10^{5}	3.696×10^{6}	2.271×10^{7}
	C_x	2.153×10^{-3}	4.243×10^{-3}	5.060×10^{-3}	3.493×10^{-3}	3.477×10^{-3}	5.650×10^{-3}	6.289×10^{-3}	4.310×10^{-3}
6	V	3.014×10^{-2}	8.524×10^{-1}	1.152×10	7.699×10	3.418×10^{-2}	9.268×10^{-1}	1.226×10	7.852×10
	R	1.256×10^{4}	3.553×10^{5}	4.861×10^{6}	3.209×10^{7}	1.425×10^{4}	3.863×10^{5}	5.112×10^{6}	3.283×10^{7}
	C_x	2.153×10^{-3}	4.243×10^{-3}	4.925×10^{-3}	3.325×10^{-3}	3.477×10^{-3}	5.650×10^{-3}	6.121×10^{-3}	4.103×10^{-3}

$L \backslash \gamma$		0.8				0.4			
10	V	2.335×10^{-2}	7.189×10^{-1}	1.040×10	7.349×10	2.647×10^{-2}	7.817×10^{-1}	1.110×10	5.954×10
	R	1.622×10^{4}	4.994×10^{5}	7.315×10^{6}	5.106×10^{7}	1.839×10^{4}	5.430×10^{5}	7.692×10^{6}	5.224×10^{7}
	C_x	2.153×10^{-3}	4.243×10^{-3}	4.760×10^{-3}	3.125×10^{-3}	3.477×10^{-3}	5.650×10^{-3}	5.917×10^{-3}	3.857×10^{-3}

動粘性係数及び音速が

$$\frac{\mu}{\rho}=1.141\times10^{-6}\ \mathrm{m^2/sec},\ a=1466.50\mathrm{m/sec}$$

のとき，長さ L_m 及び γ を種々変化した場合の水中に於ける平面板の摩擦抵抗係数を求めれば次の様になる。

$L \backslash \gamma$		0.8				0.4			
0.5	V	1.417×10^{-2}	5.154×10^{-1}	8.516	0.712×10	1.607×10^{-2}	5.605×10^{-1}	9.069	6.845×10
	R	2.672×10^{4}	9.716×10^{5}	1.626×10^{7}	1.265×10^{8}	3.029×10^{4}	1.056×10^{6}	1.709×10^{7}	1.294×10^{8}
	C_x	7.933×10^{-4}	1.521×10^{-3}	1.627×10^{-3}	1.044×10^{-3}	1.281×10^{-3}	2.326×10^{-3}	2.490×10^{-3}	1.653×10^{-3}
1	V	1.002×10^{-2}	4.091×10^{-1}	7.413	6.302×10	1.136×10^{-2}	4.448×10^{-1}	7.895	6.427×10
	R	3.831×10^{4}	1.542×10^{6}	2.830×10^{7}	2.376×10^{8}	4.284×10^{4}	1.677×10^{6}	2.976×10^{7}	2.431×10^{8}
	C_x	7.933×10^{-4}	1.521×10^{-3}	1.554×10^{-3}	9.597×10^{-4}	1.281×10^{-3}	2.326×10^{-3}	2.377×10^{-3}	1.520×10^{-3}
2	V	7.087×10^{-3}	3.247×10^{-1}	6.454	5.917×10	8.035×10^{-3}	3.531×10^{-1}	6.873	6.035×10
	R	5.343×10^{4}	2.448×10^{6}	4.928×10^{7}	4.462×10^{8}	6.059×10^{4}	2.662×10^{6}	5.182×10^{7}	4.565×10^{8}
	C_x	7.933×10^{-4}	1.521×10^{-3}	1.484×10^{-3}	8.823×10^{-4}	1.281×10^{-3}	2.326×10^{-3}	2.270×10^{-3}	1.397×10^{-3}
4	V	5.011×10^{-3}	2.577×10^{-1}	5.618	5.556×10	5.682×10^{-3}	2.802×10^{-1}	5.983	5.666×10
	R	7.557×10^{4}	3.886×10^{6}	8.580×10^{7}	8.379×10^{8}	8.569×10^{4}	4.226×10^{6}	9.023×10^{7}	8.572×10^{8}
	C_x	7.933×10^{-4}	1.521×10^{-3}	1.417×10^{-3}	8.112×10^{-4}	1.281×10^{-3}	2.326×10^{-3}	2.168×10^{-3}	1.285×10^{-3}
6	V	4.091×10^{-3}	2.251×10^{-1}	5.181	5.355×10	4.639×10^{-3}	2.448×10^{-1}	5.517	5.461×10
	R	9.255×10^{4}	5.092×10^{6}	1.187×10^{8}	1.211×10^{9}	1.049×10^{5}	5.537×10^{6}	1.248×10^{8}	1.239×10^{9}
	C_x	7.933×10^{-4}	1.521×10^{-3}	$1,379\times10^{-3}$	7.723×10^{-4}	1.281×10^{-3}	2.326×10^{-3}	2.110×10^{-3}	1.223×10^{-3}
10	V	3.169×10^{-3}	1.899×10^{-1}	4.678	5.112×10	3.594×10^{-3}	2.065×10^{-1}	4.981	5.213×10
	R	1.195×10^{5}	7.159×10^{6}	1.786×10^{8}	1.927×10^{9}	1.355×10^{5}	7.784×10^{6}	1.878×10^{8}	1.972×10^{9}
	C_x	7.933×10^{-4}	1.521×10^{-3}	1.333×10^{-3}	7.259×10^{-4}	1.281×10^{-1}	2.326×10^{-3}	2.039×10^{-3}	1.150×10^{-3}

上の表から分る様に，レイノルズの相似律は一つの近似法則で，長さの影響を考えなければいけない。