χ2テストについて

χ^2テストについて

飯塚仁之助

目次

一　まえがき

調査方法には、悉皆調査法と一部調査法とがある。そして悉皆調査が不可能なるために一部調査で甘んじなければならないが故に一部調査を行うにせよ、悉皆調査は可能であるが、時間的、経済的面等々をも考慮した上で、然も尚且ある程度の正確な値が算出されるが故に一部調査を行うにせよ、果亦悉皆調査は可能であるとしても根本的に於て一部調査が優

(註一)(註二)

位であるが故に一部調査を行なわねばならないとして(註三)行うにせよ、いづれの見解に立つて一部調査を行うかは論外として、此の種の調査が最近急劇に行なわれ、且又時代の推移と共にその利用度、重要度を益々増加しつつあることは、人口調査、工場における品質管理 (quality control)、或は米国に於て盛に研究されてきた市場調査 (market research) 等々に利用されているのをみても充分感知せられる。

おもうに一部調査は、如何なる場合に於ても標本それ自体の特性 (statistic) を目的とするものではなくして、常に究極的には、標本を通じて母集団の特性 (parameter) を知ることを目的とするものでなければならない。故に最もよく其の目的達成のためには如何にして適当な標本を抽出すべきかという抽出問題が重要なものとなつてくる。然し此処では此の問題は省略し、任意抽出によりて標本が得られたと仮定し、統計的仮説検定の問題を論述することゝしよう。所で一口に統計的仮説検定とはいうものの之れは如何なるものであろうか。それには先づ統計的仮説について知られればならないがでは統計的仮説とは如何なるものか、これ亦明確に表現することは仲々むづかしいが、例えば投銭百回の実験に於て五十回は表、他の五十回は裏が現われる、換言すれば、一回の実験に於て表、裏各々の現われる確率は $1/2$ であると考えることが出来る。これは統計学上から見るときは一つの統計的仮説である。それにもかかわらず、実際の投銭に於ては、いろ〳〵の要素の作用を受けて、必ずしも今述べた統計的仮説と一致する結果が現われるものではない。此の場合、経験的な結果が果して仮説と如何なる程度に一致しているか、或は此の実験に限つて表、裏各々の出る確率は $1/2$ であると仮説をたてたことそれ自体がそも〳〵不合理であつたのかどうかを吟味しなければならない。この吟味が即ち統計的仮説検定である。従つて仮説の設定が不可能なる場合に於ては、統計的仮説検定の問題は当然始めから起り得ない。

さて、「仮説検定 (test of hypothesis) は標本から母集団えと飛躍して判断するのであるから、決定的の判断ではなく、ある程度の過誤を避けることは出来ない」(註四)。そしてその過誤には、仮説が実は真であるにもかかわらず捨てることによつて起こる過誤―これを吾々は第一種の過誤 (error of the 1 st kind) といい―と仮説が真でないにもかかわらず採択する過誤―これを吾々は第二種の過誤 (error of the 2 nd kind) という―との二種の過誤があり、これらは真である場合になるべく棄てないという方に重点を置くか、逆に真でないにもかかわらず採択するのを防ぐという点に重点を置くかによつて、一方の過誤の犯す確率を少なくすることは出来るが、反面それだけ他方の過誤の犯す確率を増大させ、両種の過誤を同時に除去することは不可能であり、従つて過誤を犯かさねばならぬことはやむをえないと認め、問題は犯す確率をどの程度まで認めるか、即ち採択と棄却との基準をどこに設定するかということであるが勿論これに対する正確なる基準はなく、結局は調査者の、その時々における判断にまつの外はない。尚注意しなければならないことは「何時過失を犯し、何時犯かさなかつたかということは全く不明で、唯吾々の知ることの出来るのは、その過失を犯す確率だけである。」(註六) ということである。

次に問題となるのは、如何なる検定法があるかということであるが、ここでは其の方法の一つたる χ^2 テスト (chi-square test) について論述することとする。それより前に、χ^2 テストの基礎となつている正規分布 (normal distribution) について一瞥しよう。

(註一) 電球の耐久時間測定の場合はここにあてはまるよき例である。

(註二) マイヤ教授は一部調査をも含めて統計調査代用法と呼んでいる G. v. Mayr, Statistik und Gesellschaftslehre.

（邦訳。大橋隆憲訳。「統計学の本質と方法」。小島書店昭和二十八年七月。二〇頁）

（註三）増山元三郎校訂「推計学への道」。（東京大学協組出版部。昭和二十五年二月）八二頁には次の如く書かれている。
「全数調査よりも一部調査の方が安い・速い・それにかなり正確だという考え方で、推計学者が『代用的』標本調査を主張していると考える人があつたとしたら、それは極めて皮相な観察といわざるを得ないであろう」

（註四）近藤次郎著「教育における統計の利用。」昭和二十八年四月、東京教育研究所。第二部、一三一頁

（註五）佐藤良一郎著「少数例適用　無相関検定法」。昭和二十六年七月四版、中文館書店。二九頁

二　正規分布

投銭の実験を行うにあたつて、若し何等の意志がなく普通に投げた場合に於ては、表が現われるか或は裏が現われるかは、多数の小原因の全体作用による、いわゆる偶然の作用により、吾々は正確に予期することは出来ない。然し乍ら、各々の現象が正確に一定の確率に従つて現われると考えるならば、次のような事がいわれる。

即ち、若し二個の貨幣を同時に投げたならば、現われる種類はHH, HT, TH, TT（但しHは表を、Tは裏を表わす）の四通りのみであるが、その現われる回数は夫々同じである。所がHT, THの場合は、共に一個表が現われたとみられるから、二枚とも表、一枚だけ表で他の一枚は裏、二枚とも裏の三通りの種類に分けて考えれば、夫々の現われる回数の割合は一、二、一である。

次に、同時に三個投げた場合を考えれば、その現われる種類は、HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, HTT, TTTの八通りのみで、然も各々の現われる回数は等しく、そして三枚が表、二枚が表で他の一枚が裏、一枚が表で他の二

枚は裏、三枚とも裏の現われる回数の割合は一、三、三、一、である。同様に十二枚の貨幣を投げた時、十二枚とも全部表、十一枚が表で一枚が裏、十枚が表で他の二枚が裏、……二枚が表で十枚が裏、一枚が表で他の十一枚が裏、十二枚とも全部裏の現われる回数の割合は、一、一二、六六、……六六、一二、一である。

今、貨幣の数並びに実験回数を共に非常に大とし、そして起りうる場合の度数の分布図表を画き、それを滑らかにすれば左右対称の鐘型の曲線となる。吾々はこれを正規曲線とよび、次のような形の式で表示せられる。

$$y=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

(但し π は円周率、e は自然対数の底、m は x の平均値をあらわす。)

所で正規分布には次の如き特性がある。(註一)

(a) 曲線の下部の全面積は1である。(註二)

(b) 曲線は、値 $x=m$ を中心に対象であり、それ故に m は分布の平均、中位数 (median) であると同時に並数 (mode) でもあることは、明白である。

分散 (variance) 等々を計算する場合には、平均は0としてとられる。

(c) 分散は次の表示によつて与えられる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} yx^2\,dx$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2\sigma^2} x^2 dx$$

$$=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} t^2\, dt$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt,$$ 積分すると

$$=\sigma^2$$

（d） 平均偏差（mean deviation）は次の如く与えられる。

$$\eta=\int_{-\infty}^{\infty} y\cdot|x|\, dx$$

$$=\frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-x^2/2x^2} x\, dx$$

$$=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-t}\, dt$$

$$=\sigma\sqrt{2/\pi}=0.7979\,\sigma$$

かくして　$\eta\fallingdotseq(4/5)\sigma$

（e） 第三次積率並に第四次積率は

$$\mu_3=\frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2\sigma^2} x^3 dx=0$$

$$\mu_4=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/2\sigma^2}x^4dx=3\sigma^4$$

それ故　$\beta_1=0$

$$\beta_2=\mu_4/\sigma^4=3$$

（f）　$x=-P$ と $x=P$ との間の曲線の下部面積は、全体の面積の半分である。換言すれば、$x=-P$ と $x=P$ との間の相対度数は $\frac{1}{2}$ だということによつて蓋然誤差（probable error）P は決定せられる。

即ち　$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^p e^{-x^2/2\sigma^2}dx=\frac{1}{4}$

右の説明から、それは次の数式によつて求められる。

$$p=0.6745\,\sigma=0.8454\,\eta$$

値 $m-P$ と $m+P$ とは度数分布に於いて考えられる四分位数に相応し、そしてその範囲は 50% 区域（50%zone）として知られている。

さて、$x=0$ と $x=R$ との間の正規曲線の下部面積は

$$S=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^R e^{-x^2/2\sigma^2}dx$$

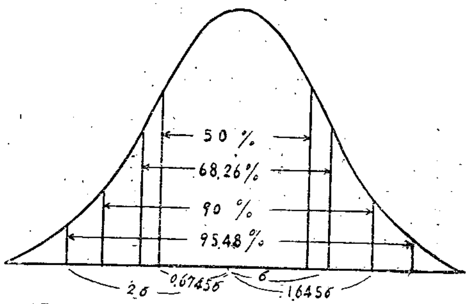
$x=\sigma t$ とおくと

x^2 テストについて

$$S=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\frac{R}{\sigma}} e^{-t^2/2}\,dt$$

これは、簡単な方法では解けない積分であるが R/σ の種々な値については別に数値表が出来ている。今それらのうち、いくつかの主な値を記述すれば

$R=0.6745\sigma$ の時	$-R$ から R までは全面積の	50%	
$R=\sigma$	〃	〃	68.26%
$R=1.645\sigma$	〃	〃	90%
$R=2\sigma$	〃	〃	95.48%
$R=2.33\sigma$	〃	〃	98%
$R=3\sigma$	〃	〃	99.73%



(R = 2.33σ, R=3σ の場合は省畧す)

成程、一層精密な測定器の使用によつて、確かに従来よりも正確な測定値を算出することが出来るようになつたことは事実であるが、大小の差こそあれ、厳密な意味では毎回その測定値に多少の相違を生ずる。それは吾々の識別不可能な無数の小原因の作用による、いわゆる偶然的作用の結果に基づくものであり、これを偶然誤差と名づけている。所が是等の誤差は、実は今述べた正規分布をなすと考えられる故、既述の表は、次の如く解釈するのに役立つ。例えば、誤差の平均を中心に左右に 1.645σ だけとれば、起りうる誤差の 90% はその中に含まれ、又平均

を中心に左右に 2.33σ だけをとれば、起りうる誤差の 98% はその中に含まれると考えることが出来る。又、誤差の平均値を m とし、$m\pm1.645\sigma$ 以上の誤差は、多数の小原因の作用によるいわゆる偶然的作用の結果はでなくして、何等かの特殊な要素―有因―の作用によつて生じたと考えるならば、実は偶然的作用によつて生じた誤差にもかゝわらず、有因によつて生じた誤差とみなすことは、百回に十回だけありうるし、$m\pm2.33\sigma$ 以上の誤差を、有因によつて生じた誤差と考えるならば、実は偶然的作用によつて生じたにもかゝわらず、有因の結果とみなすことは百回に二回だけありうると考えられる。

（註1） C. G., Lanbe, Elements of Statistics. London, 1952. pp. 45—46.

（註11） 面積 $S=\int_{-\infty}^{\infty} y\,dx$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}dx$$

$x=m+\sqrt{2}\sigma t$ とおくと

$$S=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt$$

これは値が $\sqrt{\pi}$ である所の積分である。

故に全面積は1である。

三　自　由　度 (degrees of freedom)

今仮りに三つの整数を選ぶ場合を仮定しよう。その際何等の拘束条件 (constraint) がなかつたならば、吾々は三個の

整数を各々独立に、自由に選ぶことが出来る。然し乍ら、三つの整数の和が 60 とならなければならないという拘束条件が一つ添加されたならば、そして例えば仮に最初自由に選んだ数が夫々5と 10 であつたとすれば、第三番目にとるべき数はもはや吾々の意志に従つて自由に選択出来るのでなくして実は 45 $\{60-(5+10)=45\}$ でなければならぬと限定される。即ち此の場合に於ては、自由に選択出来る整数は三個でなくして実は二個なのである。更に、一個の整数は三個の整数の和即ち 60 の半分でなければならぬという拘束条件が附加さられた場合を考えよう。然る時は当然一個の整数は 30 でなければならない。次に、仮に最初自由に選んだ整数を前と同様5であつたとすれば、5を選択すると同時にもはや残りの整数は、前の二つの拘束条件（和が 60 であることと、一個の整数は和の半分であること）によつて、当然 25 $\{60-(30+5)=25\}$ でなければならぬと限定され、自由に選択することは許されない。従つて、此のように拘束条件が二つある場合に於ては、自由に選択の出来る整数は唯一個にしか過ぎない。更に拘束条件が一つ附加された場合、例えば三個の整数の和が 60 で一個の整数は、和の $\frac{1}{2}$ 他の一個は $\frac{1}{3}$ でなければならない場合を考えよう。かゝる場合に於ては、一個の整数は 30、他の一個は 20、而して合計は 60 であるから残りの一個の整数は 10 $\{60-(30+20)=10\}$ でなければならないと限定され、従つてもはや吾々は一個の整数すら自由に選択することは出来ない。

「一般に、一組のデーターに於て独立の拘束条件の数を K とするならば、吾々は次のような簡単な方程式によつて ν を定めることが出来き、

$$\nu=m-K$$

そして ν は自由度の数である。それは自由に定めることが出来る所の級度数の数 (the number of cell frequencies) であり、残りの K はデーターが従属されている条件に従つている。(註一、)」それ故、χ^2 テストを実際になす場合の例として、後述す

	1	2	計
Ⅰ	X_{I1}	X_{I2}	A_1
Ⅱ	X_{II1}	X_{II2}	A_2
計	B_1	B_2	N

る「コヽアの種子の長さ」の表について考えれば、こゝに於ては、期待度数を算出するには若し各々のクラスに10以下の度数がないようにするという操作を行う必要がないとすれば、クラスの度数の和は観察度数の和1,000に等しくなければないという制限が唯一つしかないから、このような例における自由度の数は、クラスの数から1だけ引いたもの即ち $7-1=6$ である。

次に上に表示された如き2×2表についての自由度の数を考えることにしよう。此の際Xの数は2×2個であるが拘束条件は

$$X_{I1}+X_{I2}=A_1$$

$$X_{II1}+X_{II2}=A_2$$

$$X_{I1}+X_{II1}=B_1$$

$$X_{I2}+X_{II2}=B_2$$

更に $A_1+A_2=B_1+B_2=N$

である。所で最後の拘束条件は先の四個の拘束条件の内一個を不用とする故、その求める自由度の数は $\nu=2\times2-(2+2-1)=1$ (註二、)

である。

此の考えは、コンティンジェンシィ表 (contingency table) における自由度の数を測定する場合にも用いられる。即ち一般に $k\times l$ 表について考えるとその求める自由度の数は $\nu=kl-(k+l-1)$

$$=(k-1)(l-1)$$

である。

(註1) G. U. Yule & M. G. Kendall, Introduction to the Theory of Statistics. 14 th ed, London, 1950. pp. 461—462.

(註二) 此の事は実際に行つてみれば明らかである。若し X_{I1}. X_{I2}. X_{II1}. X_{II2} の内、どれでも1個だけ任意に選択すれば、他の三個は単に算術的計算で求められる。換言すれば、残り三個の内どの一個も、もはや任意に選択することは出来ない。即ち自由度の数は一である。

四　χ^2 テスト

実際に得られたデーターと、理論的に予測の可能な所謂期待度数とを比較して、始めにたてた仮説が合理的であるか否かを調べるために適用される重要な方法に χ^2 テスト (chi-square test) と呼ばれているものがある。吾々が此のテストを、適用するときには、実際に得られた観察度数と、期待度数とを比較し、両者の間の相対的相違が余り甚だしければ、先にたてた仮説は不合理だと認めなければならない。(註一)

一般に度数分布に於ては、データーは本質的に正規分布をなしているとか、或るいはポアソン分布の型をなしている等々と仮説をたてる。そしてその仮説のもとにおいての期待度数と観察度数とを比較するのである。従つて若しデーターが得られたもとの母集団は正規分布をなしているとの仮説のもとに、その期待度数と経験度数とを比較して、その相違が余りに懸隔したときには、当該母集団は正規分布をなしているとの仮説を断念し、更に他の仮説をたてゝ検定してゆくのである。「尚注意しなければならないことは、分布の形の決定でよく問題にされるクラスの区切り方が此の検定の場合に於

も少なからず影響するということである。詳言すれば、区切り方を変えることによつて、χ^2の値が大きくなつたり小さくなつたり、そしてある場合には仮説は適合していると看做され、又他の場合に於ては適合しない場合さえ生ずるのである。(註二)従つて検定を行うに当つては、此の区切りの問題をも共に併せて考えねばならない。」

観察度数をa、期待度数をtとするとχ^2の値は次の式によつて求められる。

$$\chi^2=\Sigma\frac{(a-t)^2}{t} \quad \text{(註三)}$$

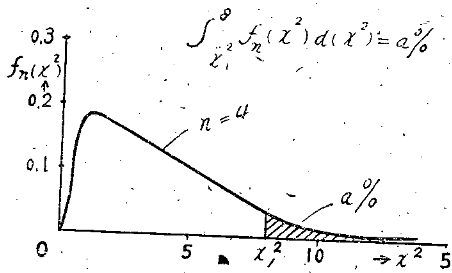
次に実際のデーターを用いχ^2テストを行なつてみよう。(註四、)

コヽアの種子の長さ

級間隔	級間隔の中点	観察度数 a	期期度数 t	$a-t$	$(a-t)^2$	$\frac{(a-t)^2}{t}$
12—14	13	4	1	− 4.5	20.25	0.686
15—17	16	21	28.5			
18—20	19	231	234	− 3	9	0.038
21—23	22	496	473	+23	529	1.118
24—26	25	215	234	−19	361	1.543
27—29	28	30	28.5	+ 3.5	12.25	0.415
30—32	31	3	1			
計		1,000	1,000	0	$\chi^2=3.8$	

上表に於て、第三縦列欄は観察度数、第四縦列欄は期待度数を表示する。(註五)こゝに於て注意しなければならないことは、級間隔の中点13と16、並に28と31に対する期待度数は夫々合計せられねばならないということである。之れは、如何なるクラスにおいても10以下の度数がないようにするためである。(註六)第五縦列欄に示されている数字は唯単に第三縦列欄の度数から第四縦列欄の度数を引いた値に過ぎないから、その合計は零になる不都合さがある。かゝる不都合を避けるために標準偏差を算定した場合の如く差の自乗$(a-t)^2$を作つて第六縦列欄に記入する。然し更に考慮せねばならないことは、例えば投銭に於て千回の実験の結果十回だけ表が多く現われた場合と、五十回の実験に於て十回だけ多く表が現われた場合とを比較したとき、共に表が十回だけ多く現われたにも

か〻わらず、表、裏の現われる割合の確率は前者の方が後者に比較して一層安定していると考えられることである。か〻る相対的大きさの問題が、こ〻に於ても考慮せられねばならないので第六縦列欄に於ける各行の値は夫々の期待度数によつて割られねばならない。此の値が第七縦列欄に記入されている。そしてその総和が即ちχ^2の値であり、χ^2の値が小さければ小さい程適合していると看做されるべきであるが、然し求められたχ^2の値も又実はクラスの数が増せば増す程大となる傾向がある。従つて、こ〻に於ては単にχ^2の値の大小が問題となるのではなくしてクラスの数に比較したχ^2の値の大小が問題であり、χ^2のテストを行うに当り、既に述べた自由度の数の問題の必要性がとりあげられるに至つたのもこ〻に起因する。此の例では、$\chi^2=3.8$であり、自由度の数は4である。(註七)



さて、χ^2の値と自由度の数が求められたならば、次は棄却域の決定である。そして若し1%有意水準を用うるならば、自由度が4なる時はχ^2の値は13.277より大なれば棄却域に含まれてしまい、それより小さければ棄却域外であるということをFisherのχ^2の表(註八)から知ることが出来る。(註九)所が此の例に於てはχ^2の値は3.8であるから当然棄却域には含まれない。念のため、自由の数が4である時χ^2の値3.8を得る確率を求めるならば約0.45である。従つて始めにたてた仮説は相当よく適合しているとみてよいわけである。但し注意せねばならぬことは、確率の値が大きければ大きい程仮説が証明されたというのは誤りであるということである。例えば0.999以上の値を得るのは、仮説が正しい時には僅かに千回に一回の割でしか起こらない筈だからである。

	病気にかゝつた者	かゝらなかつた者	合　　計
注射を受けた者	15	9	24
受けなかつた者	59	16	75
合　　計	74	25	99

更に、χ^2テストの用法として重要なものゝ一である独立性の検定 (test of independence)[註一〇] について行うことにしよう。上の表は齊藤、杉原両氏によつてなされた調査の結果を

(1) ワクチンの接種を受けたか受なかつたか

(2) 百日咳にかゝつたか、かゝらなかつたか

によつて 99 人を分類して得た度数表である。2×2表については、期待値を求めなくても次のような式によつて直ちに算出出来るから、こゝにおいては直接法を用いて行うことにする。

$$\chi^2=\frac{(X_{I1}\times X_{II2}-X_{I2}\times X_{II1})\times N}{(X_{I1}+X_{I2})(X_{I1}+X_{II2})(X_{I1}+X_{II1})(X_{I2}+X_{II2})}$$

但し、X_{I1}, X_{I2}, X_{II1}, X_{II2} は4個の観察度数である。

右式に夫々の値を代入すると

$$\chi^2=\frac{(15\times16-59+9)^2\times99}{24\times75\times74\times25}\times\frac{8,311,491}{3,330,000}\doteqdot2.52$$

自由度は1であるから χ^2 の表によれば、此の値に対応する確率は5%より大である。従つて此の実験の結果からは、百日咳に対する免疫性は予防注射を受けない人より受けた人の方が高いと結論することは出来ない。

(註一) 但し「理論的ニ考ヘレバコノχ^2ノ確率ハ如何ニ小トナッテモソノ確率ニ相当スルダケハ、ソノ試料内ノ分ガ特定ノ分布ニ一致スルト言ヒ得ル権利ガアル……」と考えられる。近藤忠雄著「計数の統計学」(昭和十九年三月、岩波書店)三〇頁

(註二) 詳くは林知己夫著「心理学研究に必要なる統計的方法」(昭和二十八年中山書店) 六二―六三頁参照

（註三） 但し単純比率の場合には、χ^2 を計算するために F. R. Immer によつて考えられた直接の公式を用いると便利である。その公式は

$$\chi^2=\frac{(a_1-a_2x)^2}{xN}$$

こゝに於て、理論比は $x:1$

a_1 は x に対応する実測度数

a_2 は 1 に対応する実測度数

N は総度数をあらわす。

(C. H. Goulden, Methods of Statistical Analysis. New York, 1950. p. 90)

（註四） D. D. Paterson, Statistical Technique in Agricultural Research. New York, 1939. p.99 より転載す。

（註五） 期待値並にそれ以後の計算は筆者が行なつたものである。尚ココアの種子の長さの分布は、正規分布をなすとの仮説の下に期待値を計算したのであるが、その方法は E. B. Mode, Elements ef Statistics. 2nd ed. New York, 1952. p. 160 にある例題に倣つたものである。

（註六） その理由としてウォー教授は次の如く述べている。

「……之れについての理由は明白である。若し吾々が投銭の結果はバランスするかどうかということを知ろうと欲したならば、たつた二回や三回の投銭を基準として決定しようと試みることよりは優つているということを吾々は知つているからである。結局、若し吾々が貨幣を一回投げたならば回数の百パーセントは表か裏が出、決して回数の五十パーセントではない……」

A. E. Waugh, Elements of Statistical Method. 3nd ed. New York, 1952. p. 222

（註七） 此の場合の自由度の数は、元のクラスの数より一だけ引いたものではなくして、度数分布において両極の度数が十より小さい故に二つのクラスの度数が加えられた時は、一つのクラスと見做してから自由度の数を算定する。

（註八） R. A. Fisher, Statistical Methods for Research Workers. 11 th ed. London, 1950

（邦訳。遠藤健児・鍋谷清治共訳「研究者の為の統計的方法」昭和二十七年三月荘文社。九八―九九頁

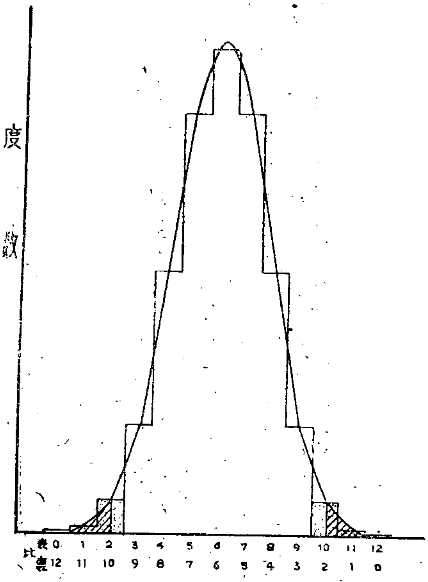
（註九） 自由度の数が 30 以上の時は、$\sqrt{2\chi^2}-\sqrt{2n-1}$ が 0 を中心として正常に分布し、其の標準偏差は 1 であるとの事

実を利用し、正規分布の表を用いて算出する。

（註十） 国立公衆衛生院「公衆衛生院研究報告」第二巻第一号（昭和二十七年六月） 英文五頁

五 連続性に対する補正

期待値と観察値との比較によつて、始めてたてた仮説が果して適当であつたかどうかという問題については、χ^2テストを用いればよいことを論じてきた。然し、此のテストは果して如何なる場合においても問題の解決を与えてくれるものであるかどうか、そして不充分なる場合があるとしたらそれは如何なるときであろうか、更に又それは何如なる方法によつてその欠陥を補うことが出来るのであろうか、これが最後に残こされた問題である。



既に記したように、投銭の結果が理論的に現われるとしたならば、十二枚の実験に於て、十二枚とも表、十一枚が表で他の一枚が裏、十枚が表で残り二枚は裏……二枚が表で他の十枚が表、一枚が表で他の十一枚が裏、十二枚とも全部裏等々の出る割合は一、一二、六六……六六、一二、一である。そしてそれを図示したものが上図の度数多角形である。所が連続度数分布は曲線であり、これは標本を限りなく大きくしたときに、実際

の度数分布が近づく極限なのである。

然るに χ^2 の方法は連続度数分布の曲線に基礎がおかれているにもかゝわらず、頻度分布は常に不連続である。従つて、χ^2の方法に不充分な場合があるとしたら、その一つは此の間の相違から発生するように思われる。

若しも十二枚の投銭に於て、表二枚以下が現われるのをもつて成功と看做するならば、成功を得るための確率は全面積に対する点のうたれている部分の面積であるにもかゝわらず、2：10の χ^2 テストに於ては上図の曲線に基礎が置かれているから、成功を得る確率は全面積に対する斜線の引かれている部分の面積によつて表示せられる。然るに斜線の引かれている部分の面積は点の打たれている部分の面積より小であることは一目して明瞭である。そしてそれは、図形の両極に近づけば近づく程その相対的差は大となる。しかも此のような場合に於ては、斜線の引かれている部分の底辺を、2と3の中点まで拡張することによつて両者の間の相違は略々除去せられる。従つて此の場合の補正は、期待値 t に $\frac{1}{2}$ だけ加えたものを真の期待値と看做せねばよいのである。一方、表が十枚以上現われるのをもつて成功と看做す場合に於ては、同様に斜線の引かれている部分の底辺を10と9の中点まで拡張することによつて両者の間の相違は殆んど除去せられる。

即ち此の場合の補正を行うにあたりては、期待値から $\frac{1}{2}$ だけ減じたものを真の期待値としなければならない。略言すれば $(a-t)$ の値を常に $\frac{1}{2}$ だけ大にするように作られねばならない。そしてそうすることによつて常に大きかつた分子を、ひいては過大に評価されていた χ^2 の値を是正することが出来るわけである。此の方法は所謂 Yates の補正法と呼ばれているものであるが、此の方此を用いればχ^2の算式は次の如く書き改めることが出来る。

$$\chi^2=\Sigma\frac{(a-t-\frac{1}{2})^2}{t}$$ （但し $\frac{1}{2}$ は $a-t$ の値を常に大にするように操作される。）

特に此の補正法は、自由度が一であるときに必要であるとされているのであるが、自由度が二以上になるとその効果は少いといわれている。然も自由度が一なる場合に於てとりわけ僅少の差によつて有意として仮説が棄却せらたるような場合に於ては、此の補正法は特に必要となるのである。

	A	nonA	計
第I資料	152 (144)	8 (16)	160
第II資料	208 (216)	32 (24)	240
計	360	40	400

或る実験によつて、上表のような結果が得られたとする。(括弧の中の数字は、(註)期待値を表わす。)然るとき、補正法を用いない場合の χ^2 の値は、

$$\chi^2=\frac{(152-144)^2}{144}+\frac{(8-16)^2}{16}+\frac{(208-216)^2}{216}+\frac{(32-24)^2}{24}=7.4 \quad P<0.01$$

それ故、確率 P の値が 0.01 より小なる場合は有意として仮説を棄却するとすれば、此の場合の仮説は当然棄却されなければならない。

所が、補正法を用いて χ^2 の値を求むれば、

$$\chi^2=\frac{(152-144-\frac{1}{2})^2}{144}+\frac{(8-16+\frac{1}{2})^2}{16}+\frac{(208-216+\frac{1}{2})^2}{216}+\frac{(32-24-\frac{1}{2})^2}{24}=6.5 \quad P>0.01$$

従つて、此の場合は仮説は棄却せられない。

此のように補正を行えば、補正を行なわない場合の χ^2 の値に比較して常に小となり、場合によつては、補正することによつてやゝもすれば仮説の棄却をしないでもよいのである。然もその場合の方がより正しいのである。従つて、補正することなしに、有意水準と僅少の相違によつて仮説が棄却せられるような場合は、常に補正を行つてその後検定する必要があるのである。

（註）　期待値の求め方、例えば此の場合に於て152に対する期待値を x とすると

$$x=(152+8)\times\frac{(152+208)}{400}=144$$

他の期待値は、単に算術を行えば求められる。