リーマン対称空間内の部分多様体のベクトル束による研究

２０２３年度　理工学研究科

博士学位請求論文（要旨）

A study of submanifolds in Riemannian symmetric spaces by vector bundles

髙橋　正郎

１　問題意識と目的

位相幾何学，代数幾何学ではベクトル束を利用した研究は古くから行われてきた．しかし，微分幾何，特に，部分多様体論ではベクトル束を利用した研究は少ない．この論文では，部分多様体の微分幾何に新しい視点を導入する．また，部分多様体の微分幾何は球面や複素射影空間の部分多様体の研究が中心であった．グラスマン多様体の部分多様体，もっと広く，対称空間の部分多様体を調べるにはベクトル束の利用が有効と思われる．本論文では，ベクトル束の微分幾何の応用として，リーマン対称空間の部分多様体の微分幾何的性質を調べる．具体的に三つの問題を取り上げる．

・複素射影直線から複素２次超曲面への正則等長埋め込みの問題
・複素射影空間の複素超曲面のKillingベクトル場に関する問題
・Riemann対称空間上の等径関数の問題

２　構成及び各章の要約

この論文の構成は以下の通りである．

１．序章
２．準備
３．複素射影直線から複素２次超曲面への正則等長埋め込み
４．複素射影空間の複素超曲面のキリングベクトル場
５．対称空間上の等径関数とベクトル束

以下，概要を述べる．

<u>第１章　「序章」の概要</u>

序章では，この研究の背景，先行研究，先行研究との関係を述べた．

<u>第２章　「準備」の概要</u>

W は内積 $(\cdot,\cdot)$ を持ったベクトル空間とする．$Gr_p(W)$ で，W 内の p 次元部分空間のつくるグラスマン多様体を表す．ただし，W が実ベクトル空間のときは向きづけられた部分空間のつくるグラスマン多様体とする．$\mathrm{n}=\dim W$ とすると，有向実グラスマン多様体は $\mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(p)\times\mathrm{SO}(n-p)$ ，複素グラスマン多様体は $\mathrm{SU}(n)/\mathrm{S}\big(\mathrm{U}(p)\times\mathrm{U}(n-p)\big)$ と既約対称空間になることを注意しておく．

さて，$S\to Gr_p(W)$ を同語反復束(tautological bundle) とすると，S は自明束 $\underline{W}=Gr_p(W)\times W$ の部分束になるので，完全系列 $0\to S\to \underline{W}\to Q\to 0$ を得る． $Q\to Gr_p(W)$ は普遍商束(universal quotient bundle)である． S には $\underline{W}$ から計量と接続，第二基本形式が定義される．Q と $S^{\perp}$ と同一視することで，同様に，Q にも計量と接続，第二基本形式が定義できる．

(G,K) を G が単純なコンパクト既約対称対とする．G,K の Lie 環をそれぞれ，g,k とし，$\mathrm{g}=\mathrm{k}\oplus\mathrm{m}$ で標準分解を表す．$\rho\colon G\to \mathrm{GL}(W)$ を G の既約表現とし， W は G 不変内積を持つとし $W=U\oplus V$ を K 不変な直交分解とする．ただし，U も V も非自明な W の部分空間とする．さて，$\rho(\mathrm{m})U\subset V$ かつ $\rho(\mathrm{m})V\subset U$ をみたすとする．このとき，$i(gK)=\rho(g)U$ で定義される $i\colon G/K\to Gr_p(W)$ $(p=\dim U)$ で，対称空間 G/K は $Gr_p(W)$ の全測地的部分多様体になる．また，$\mathbf{U}=G\times_K U$ は i^*S と， $\mathbf{V}=G\times_K V$ は i^*Q と同一視できる．このことにより，対称空間でも，グラスマン多様体と同様にベクトル束を利用して部分多様体を研究することができる．

一般に，多様体M上のベクトル束 $\mathbf{V}\to M$ とその大域切断のなす線型空間 W について，**評価写像** $ev\colon \underline{W}\to\mathbf{V}$ を $x\in M$，$t\in W$ に対して，$ev(x,t)=t(x)$ で定義する．評価写像が全射のとき，ベクトル束 $\mathbf{V}\to M$ は W により**大域的に生成される**という．このとき，$f(x)=\mathrm{Ker}\ ev_x$ で，写像 $f\colon M\to Gr_p(W)$ を定義する．この写像を，$\mathbf{V}\to M$ と W による**誘導写像**という．ここで，$p=\dim W-\mathrm{rank}\,\mathbf{V}$ である．このとき，$\mathbf{V}\to M$ は $f^*Q\to M$ と同一視できる．M が複素多様体で $\mathbf{V}$ が正則ベクトル束，W が正則切断のなす線型空間のとき，f は正則写像になる．特に，$\mathbf{V}$ が正則直線束のとき，f は有名な小平埋め込みになる．

$\mathbf{V}\to M$ と W による誘導写像 $f\colon M\to Gr_p(W)$ に対して，W から f^*Q の切断全体の空間 $\Gamma(f^*Q)$ への自然な写像が定義できる．この写像が単射のとき，写像 f は**充満写像**であるという．この定義は，$Gr_p(W)$ が球面または複素射影空間のときは，古典的な定義と一致する．

$\mathbf{V}\to M$ と W_i $(i=1,2)$ による二つの誘導写像 f_1 と f_2 を考える．$f_2=\phi\circ f_1$ を満たす $Gr_p(W_1)$ から $Gr_p(W_2)$ への等長写像 ϕ が存在するとき，写像 f_1 と f_2 は**像同値**という．このとき，f_i から $\mathbf{V}\to {f_i}^*Q$ への束同型 ϕ_i が得られる． ϕ が誘導する $Q\to Gr_p(W_1)$ から $Q\to Gr_p(W_2)$ への束同型を $\tilde{\phi}$ とする．このとき $f_2=\phi\circ f_1$ かつ $\phi_2=\tilde{\phi}\circ\phi_1$ ならば，(f_1,ϕ_1) と (f_2,ϕ_2) は**ゲージ同値**であるという．

例をあげる． G/K を G がコンパクトで，K は G の閉部分群であるような，コンパクト簡約 Riemann 等質空間とする．V を K 不変な内積をもつ K の表現空間とし，$\mathbf{V}=G\times_K V$ とする．すると，このとき，$\mathbf{V}$ には， G 不変な計量と標準 G 不変接続が入る．これらにより，$\mathbf{V}$ にラプラシアンが定義できる．W がラプラシアンの固有空間の部分空間で，W が $\mathbf{V}$ を大域的に生成しているとする．このとき，$W=U\oplus V$ と直交分解することができ，$\mathbf{V}$ と W による誘導写像 f は $f(gK)=gU$ で与えられる．この写像を**標準写像**という．

以上の準備のもと，論文の２章では，３章から５章で必要になる，長友氏による高橋の定理と do Carmo-Wallach の定理のグラスマン多様体への拡張を述べている（定理 2.2.4，定理 2.3.4）．

第３章 「複素射影直線から複素２次超曲面への正則等長埋め込み」の概要

次に，３章の「複素射影直線から複素２次超曲面への正則等長埋め込み」の概要を述べる．複素２次超曲面は有向実グラスマン多様体 $Gr_n(\mathbf{R}^{n+2})$ と自然に同一視できる． $Gr_n(\mathbf{R}^{n+2})$ の普遍商束は自然に正則直線束となり，その標準接続による曲率形式を R で表す． $\mathbf{C}P^1$ の第 1 Chern 類が k である正則直線束を $O(k)$ で表し，$O(1)$ の標準接続の曲率形式を R_1 で表す． $Gr_n(\mathbf{R}^{n+2})$ の基本 2 形式 ω_Q が $R=-2\pi\sqrt{-1}\omega_Q$ を， $\mathbf{C}P^1$ の基本２形式 ω_0 が $R_1=-2\pi\sqrt{-1}\omega_0$ を満たすように $Gr_n(\mathbf{R}^{n+2})$ と $\mathbf{C}P^1$ の計量を定める．写像 $f\colon \mathbf{C}P^1\to Gr_n(\mathbf{R}^{n+2})$ が $f^*\omega_Q=k\omega_0$ を満たすとき，f を**次数** k の正則等長写像という．

次の３つの定理がこの章の主要な結果である．

定理 3.3.4 $f\colon \mathbf{C}P^1\to Gr_{2k-1}(\mathbf{R}^{2k+1})$ を次数 $2k$ の正則等長写像とする．すると，f は $O(2k)$ と $\mathbf{R}^{2k+1}$ による実標準写像とゲージ同値である．

ここで，$O(2k)$ と $\mathbf{R}^{2k+1}$ による実標準写像は次数 $2k$ の正則写像になることを注意しておく．

定理 3.4.4 $f: \mathbf{C}P^1 \to Gr_n(\mathbf{R}^{n+2})$ を次数 k の充満な正則等長写像とすると，$n \leqq 2k$ が成り立つ．$\mathbf{C}P^1$ から $Gr_{2k}(\mathbf{R}^{2k+2})$ への充満な正則等長写像のゲージ同値によるモジュライ空間 M_k は $\mathbf{R}^{k(k-1)}$ 内の有界な凸開集合とみなせる．

切断全体の空間の L^2 位相から誘導された位相により M_k をコンパクト化したときの境界内の点は，$Gr_{2k}(\mathbf{R}^{2k+2})$ 内の全測地的部分多様体 $Gr_p(\mathbf{R}^{p+2})$ $(p < 2k)$ とそこへの充満な正則等長写像とみなせる．また， $Gr_p(\mathbf{R}^{p+2}) \to Gr_{2k}(\mathbf{R}^{2k+2})$ は Q の切断の零点集合として表せる．

定理 3.5.1 $\mathbf{C}P^1 \to Gr_n(\mathbf{R}^{n+2})$ への次数 k の充満な正則等長写像の像同値によるモジュライ空間を $\mathrm{M_k}$ とすると， $\mathrm{M_k} = M_k/S^1$ が成り立つ．ここで，S^1 は回転群を表す．

第４章「複素射影空間の複素超曲面のキリングベクトル場」の概要

成分が正の数である $n+2$ 次の対角行列全体の集合を P^{n+2} で表す．そして，$D = \{ \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_{n+2}) \in P^{n+2} \mid 0 < \lambda_1 \leqq \cdots \leqq \lambda_{n+2}, \sum_i \lambda_i = n+2 \}$， $D^\circ = \{ \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_{n+2}) \in D \mid 0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_{n+2} \}$ とする．次の定理がこの章の主定理である．

定理 4.1.1 S を $\mathbf{C}P^{n+1}$ のコンパクト連結な複素超曲面とする．$\mathbf{C}P^{n+1}$ には Fubini-Study 計量を考える．S に $\mathbf{C}P^{n+1}$ からの誘導計量を与える．S が非自明な Killing ベクトル場を持つならば，複素多様体として，S は超平面 $\mathbf{C}P^n$ か複素２次超曲面 $Gr_n(\mathbf{R}^{n+2})$ である．

$S = \mathbf{C}P^n$ のとき，その誘導計量は Fubini-Study 計量で，Killing ベクトル場の Lie 環は $\mathrm{su}(n+1)$ である．

$S = Gr_n(\mathbf{R}^{n+2})$ のとき， $D \setminus D^\circ$ は非自明な Killing ベクトル場を持つ計量のモジュライ空間とみなせる．$T \in D \setminus D^\circ$ に対応する計量の Killing ベクトル場は $\mathrm{so}(n+2)$ における T の等方部分 Lie 環である．

この定理で，$\mathrm{diag}(1, \cdots, 1)$ に対応する計量の Killing ベクトル場は Lie 環 $\mathrm{so}(n+2)$ になる．

第５章「対称空間上の等径関数とベクトル束」の概要

ベクトル値等径関数については，何種類か定義があるが，ここでは， Wang による定義を使う．$k=1$ のとき，この定義は通常の等径関数の定義と一致する．

定義 Riemann 多様体 $(M.g_M)$ 上のベクトル値関数 $f = (f_1, \cdots, f_k): M \to \mathbf{R}^k$ に対して，関数 $F_{ij}, G_i: \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ $(1 \leqq i, j \leqq k)$ が存在して，次を満たすとき f を**等径関数**という．(1) $g_M(df_i, df_j) = F_{ij}(f_1, \cdots f_k)$ (2) $\triangle f_i = G_i(f_1, \cdots, f_k)$

この章では，(G, K) は既約対称対で G が単連結なコンパクト単純 Lie 群，K は G の閉部分群とする．g, k を，それぞれ，G, K の Lie 環とし，$\mathrm{g} = \mathrm{k} \oplus \mathrm{m}$ を標準分解とする．

W を不変内積を持つ G の既約表現とする． W における G の主軌道(principal orbit) が W の超球になるとき，この表現を**球面型**と呼ぶ．このような表現は，Hsiang-Hsiang により分類されている．

W を G の球面型の表現とする．すると，W はそれ自身が K 既約になるか，非自明な２つの K 既約表現空間 U , V の直交直和 $W = U \oplus V$ に分解する．以下，非自明な２つの K 表現空間 U , V の直和に分解するときを考える．この場合，$\mathrm{m}U \subset V$, $\mathrm{m}V \subset U$ を満たす．$w \in W$ を $|w| = 1$ ととり，対応する $\mathbf{U} = G \times_K U$ ， $\mathbf{V} = G \times_K V$ の切断を，それぞれ s, t とする．H を $w \in W$ での G の等方部分群とする．G/K 上の関数 f を $f([g]) = |s|^2([g])$ $(g \in G)$ で定義する．以降，$w \in U$ とする．W が球面型なので，このようにしても一般性を失わない．また，S_0 , S_M を G/K での f の最小値集合と最大値集合とする．すると，S_0 , S_M は G/K の全測地的部分多様体になることがわかる．このような G/K , W , H , $U \oplus V$, S_0 , S_M は決定することができ，以下の表のようになる．

G/K	W	H	$U \oplus V$	S_0, S_M
$\mathrm{SU}(n)/\mathrm{SO}(n)$	$\mathbf{C}^n$	$\mathrm{SU}(n-1)$	$\mathbf{R}^n \oplus \mathbf{R}^n$	$\mathrm{SU}(n-1)/\mathrm{SO}(n-1)$
$Gr_p(\mathbf{C}^n)$	$\mathbf{C}^n$	$\mathrm{SU}(n-1)$	$\mathbf{C}^p \oplus \mathbf{C}^q$	$Gr_p(\mathbf{C}^{n-1})$, $Gr_{p-1}(\mathbf{C}^{n-1})$
$Gr_p(\mathbf{R}^n)$	$\mathbf{R}^n$	$\mathrm{Spin}(n-1)$	$\mathbf{R}^p \oplus \mathbf{R}^q$	$Gr_p(\mathbf{R}^{n-1})$, $Gr_{p-1}(\mathbf{R}^{n-1})$
S^{n-1}	$\mathbf{R}^n$	$\mathrm{Spin}(n-1)$	$\mathbf{R} \oplus \mathbf{R}^{n-1}$	S^{n-1}, 2points
$Gr_4(\mathbf{R}^7)$	S_7	G_2	$\mathbf{R}^4 \oplus \mathbf{R}^4$	$G_2/\mathrm{SO}(4)$, $G_2/\mathrm{SO}(4)$
$Gr_4(\mathbf{R}^8)$	$S_8^{\pm}$	$\mathrm{Spin}(7)$	$\mathbf{R}^4 \oplus \mathbf{R}^4$	$Gr_4(\mathbf{R}^7)$, $Gr_3(\mathbf{R}^7)$
$Gr_4(\mathbf{R}^9)$	S_9	$\mathrm{Spin}(7)$	$\mathbf{R}^8 \oplus \mathbf{R}^8$	$Gr_4(\mathbf{R}^7)$, $Gr_3(\mathbf{R}^7)$
$\mathrm{Sp}(n)/\mathrm{U}(n)$	$\mathbf{C}^{2n}$	$\mathrm{Sp}(n-1)$	$\mathbf{C}^n \oplus \mathbf{C}^{n^*}$	$\mathrm{Sp}(n-1)/\mathrm{U}(n-1)$
$Gr_p(\mathbf{H}^n)$	$\mathbf{H}^n$	$\mathrm{Sp}(n-1)$	$\mathbf{H}^p \oplus \mathbf{H}^q$	$Gr_p(\mathbf{H}^{n-1})$, $Gr_{p-1}(\mathbf{H}^{n-1})$
$G_2/\mathrm{SO}(4)$	$\mathbf{R}^7$	$\mathrm{SU}(3)$	$\mathbf{R}^4 \oplus \mathbf{R}^3$	$\mathrm{SU}(3)/\mathrm{SO}(3)$, $\mathbf{C}P^2$

この表で，S_n は $\mathrm{Spin}(n)$ の spin 表現，$S_n^{\pm}$ は $\mathrm{Spin}(n)$ の half-spin 表現を表す．

上の分類表で，$(\mathrm{SU}(n)/\mathrm{SO(n)}, \mathbf{C}^{\mathrm{n}})$ ，$(\mathrm{Sp(n)/U(n)}, \mathbf{C}^{2\mathrm{n}})$ ，$(Gr_4(\mathbf{R}^9), \mathrm{S}_9)$ の H の G/K への作用の余等質次元は，それぞれ，$2, 3, 2$ である．これ以外は，余等質次元が 1 である．

余等質次元が 1 のとき，f は G/K 上の等径関数となる．このとき，等位面のなかで極小超曲面になるものを決定している．また，f の等位面の主曲率とその重複度を決定した．同様に計算できるときを除き 5 つ計算すればよい.

定理 5.3.17，5.3.18，5.3.19，5.3.20，5.3.21
関数 f の正則な等位集合 $f^{-1}(c)$ の主曲率と重複度は以下のようになる.

(1) $\left(Gr_p(\mathbf{R}^N), \mathbf{R}^N\right)$ ：主曲率は $\frac{|s|}{|t|}$ ，$-\frac{|t|}{|s|}$ ，0 で重複度は，それぞれ，$q-1$，$p-1$，$(p-1)(q-1)$ である.

(2) $\left(Gr_p(\mathbf{C}^N), \mathbf{C}^N\right)$ ：主曲率は $\frac{1}{\sqrt{2}|s||t|}(|s|^2-|t|^2)$ ，$\frac{|s|}{\sqrt{2}|t|}$ ，$-\frac{|t|}{\sqrt{2}|s|}$ ，0 で重複度は，それぞれ，1 ，$2(q-1)$ ，$2(p-1)$ ，$2(p-1)(q-1)$ である.

(3) $\left(Gr_p(\mathbf{H}^N), \mathbf{H}^N\right)$ ：主曲率は $\frac{1}{2|s||t|}(|s|^2-|t|^2)$ ，$\frac{|s|}{2|t|}$ ，$-\frac{|t|}{2|s|}$ ，0 で重複度は，それぞれ，3 ，$4(q-1)$ ，$4(p-1)$ ，$4(p-1)(q-1)$ である.

(4) $(Gr_4(\mathbf{R}^7), S_7)$ ：主曲率は $\frac{\sqrt{3}}{12}\frac{1}{|s||t|}\left\{3(|s|^2-|t|^2) \pm \sqrt{9-4|s|^2|t|^2}\right\}$ ，0 で重複度は，それぞれ，3 ，3 ，5 である.

(5) $(G_2/\mathrm{SO}(4), R^7)$ ：主曲率は $\frac{1}{\sqrt{6}}\frac{1}{|s||t|}\left\{(|s|^2-|t|^2) \pm \sqrt{1-|s|^2|t|^2}\right\}$ ，$-\sqrt{\frac{2}{3}\frac{|t|}{|s|}}$ ，0 で重複度は，それぞれ，2 ，2 ，1 ，2 である.

余等質次元が 2 以上のときもベクトル束の切断 s ，t からベクトル値等径関数 F と新たな等径関数 $\tilde{f}$ を見出した．この $\tilde{f}$ を不変にする H を含む群 $\widetilde{H}$ が存在する．さらに，これらの F の等位面 $F^{-1}(c)$ は等径部分多様体だが equifocal でない部分多様体になる.

最後に Radon 変換を調べた．$d\mu$ で H の正規化された Haar 測度とし，$d\mu$ が誘導する $\psi\colon G \to H \setminus G$ のファイバーの測度も $d\mu$ で表す．このとき，**Radon 変換** $R\colon C^{\infty}(G/K) \to C^{\infty}(H \setminus G)$ を $R(f)(x) = \int_{\psi^{-1}(x)} \pi^* f \, d\mu$ $(x \in H \setminus G)$ で定義する．ここで，π は射影 $\pi\colon G \to G/K$ を表す.

定理 5.4.1 H の G/K への作用の余等質次元が 1 のとき，$\tilde{f} = |s|^2 - p/n \quad (p = \dim U)$ とすると，$R(\tilde{f})$ はW の単位超球の等径関数になり，2 つの異なる主曲率をもつ等径超曲面を誘導する.

定理 5.4.2，5.4.3，5.4.5 H の G/K への作用の余等質次元が 2 以上のとき，$R(\tilde{f})$ はW の単位超球の等径関数になり，4 つの異なる主曲率をもつ等径超曲面を誘導する.