5段階評定のファジィ・エントロピー・モデル

5段階評定のファジィ・エントロピー・モデル

A Study on a Fuzzy Entropy Model of Five Grade Rating

山　下　洋　史
Hiroshi Yamashita

目　　次

1. はじめに

人事考課の評定には、寛大化傾向・中央化傾向やハロー効果等、さまざまな評定傾向が生じる。それらの中でも、寛大化傾向は最も生じやすい評定傾向であり、十分な注意が必要である。それは、人間はどうしても甘い評定をしてしまい易く、とりわけ日本人はこうした傾向が強いからである。

寛大化傾向は、評定尺度上の高い位置に評定が偏る評定傾向であり、A, B, C, D, Eの5段階評定でいえば、AやBの評定段階が多く選択されることになる。したがって、AやBの選択比率が高くなり、C以下の選択比率は低くなる。それでは、寛大化傾向は、各評定段階に対してどのような選択比率の値となるのであろうか？

本研究では、5段階評定（A, B, C, D, E）における評定段階のメンバーシップ値の加重平均（これは「ファジィ事象の確率」[1] に相当する）というマクロ情報のみが既知で、それぞれの評定段階を選択する比率（以下、「選択比率」と呼ぶことにする）というミクロ情報が未知の場合に、これらの選択比率を推定する「拡大推論」[2] の問題を考えることにする。そこで、この問題に対して、筆者の先行研究 [3] を基に、各評定段階の選択比率の解を与えるファジィ・エントロピー最大化モデルを提案する。

さらに、上記のファジィ・エントロピー最大化モデルを用いて、メンバーシップ値の加重平均

（マクロ情報）を、0.05 刻みで 0.50 ～ 0.95 とする選択比率の分布を作成する。その上で、これらの選択比率の分布が、究極の寛大化傾向（評定段階 A の選択比率が 1 で、それ以外はすべて 0）に近いか、標準正規分布を 5 段階に分割した分布に近いかを、KL 情報量 [4], [5] によって定量的に判定する。こうした本研究の分析により、与えられた証拠（メンバーシップ値の加重平均）のみでは、本来は結論が得られないような拡大推論の問題に対して、ファジィ・エントロピー最大化の枠組みで、寛大化傾向の分布を模写することを試みる。

2. 評定データの構造と評定者の評定傾向

一般に、評定段階数を奇数に設定した非連続型評定尺度法では、中央の評定段階に厚く両端の評定段階に薄い「釣鐘型」の分布となることが多い [6]。こうした分布が極端に中央に厚く両端に薄くなると、「中央化傾向」となる。また、評定が高い位置の評定段階に偏ると、「寛大化傾向」の分布となる。

寛大化傾向は、被評定者を実際のパフォーマンスよりも高く評価することで、評定尺度上の高い位置に評定が集中する評定傾向である。一方、中央化傾向は、評定者が評定尺度上の両端への評定を回避することにより、評定尺度上の中位の付近に評定が集中する評定傾向である。そういった意味で、どちらの評定傾向も、評定者の弁別力を低下させ、評定のバラツキを小さくしてしまうことになる。これに対して、一般的な評定は「中央の評定段階に厚く両端の評定段階に薄い釣鐘型の分布」となる。

それでは、真の評定からの乖離を生じさせる評定傾向は、どのような枠組みで記述することができるのであろうか？ この問題に対して、筆者 [7] は、下記のように、寛大化傾向と中央化傾向のみならず、厳格化傾向や二極化傾向についても把握するための「評定傾向分析モデル」を提案している。

一般に、評定データは、評定者相、評定要素相、被評定者相といった 3 相構造となっている。ここで、評定者を r、評定要素を j、被評定者を k、評定を y とすれば、評定データは y_{rjk} として表され、y_{rjk} は被評定者のパフォーマンス c_{jk} を、(1) 式のように、評定者 r ごとの写像 f_r によって評定尺度上に位置づけたものとなる。この写像 f_r こそが、評定者 r の評定傾向であり、これをどのようにモデル化するかがここでの課題となる。

$$y_{rjk} = f_r(c_{jk}) \tag{1}$$

これまで、評定者の評定傾向は、評定者の甘さ・辛さ（平均）とバラツキの大きさ（分散あるいは標準偏差）によって、表 1 のように捉えられてきた。

表1. 評定者の評定傾向

評定傾向	平均	分散（標準偏差）
寛大化傾向	大	小
中央化傾向	中	小
厳格化傾向	小	小
二極化傾向	中	大

これに対して、筆者 [7] は、表1の枠組みに従って、評定者の甘さ・辛さを表すパラメータ a_r と、評定のバラツキの大きさを表すパラメータ b_r を導入することにより、(1) 式の写像 f_r を (2) 式のように定式化している。

$$y_{rjk}=f_r(c_{jk})=a_r+b_r\cdot c_{jk}+\varepsilon_{rjk} \tag{2}$$

ただし、ε_{rjk}：残差

(2) 式において、既知のデータは y_{rjk} のみであり、a_r と b_r と c_{jk} は、すべて未知のパラメータ [7]-[9] である。しかも、パラメータ b_r と c_{jk} は分離可能 [10] でないため、一度にこれらのパラメータを推定することはできない。そこで、評定は本来、何によって決まるべきであるかを考えてみると、それは被評定者のパフォーマンス（業績・態度・能力）によって決まるべきことがわかる。すなわち、評定者が誰であるかではなく、被評定者が誰であるかで決まるべきなのである。しかしながら、実際には評定者によって異なった評定をしてしまうことが多く、そこには評定者の評定傾向 f_r によって評定者間の個人差が存在する。

そこで、筆者ら [8] は、b_r よりも c_{jk} を優先して推定すべく、まず b_r の初期値を1に設定することにより、数量化理論Ⅰ類と同形式のモデルに変形してパラメータ a_r と c_{jk} の最小二乗解を推定し、次いで a_r と c_{jk} の推定値を固定してパラメータ b_r の最小二乗解を推定するという二段階の最小二乗法を提案している。さらに、こうして推定したパラメータ b_r の最小二乗解を固定して、パラメータ a_r と c_{jk} の最小二乗解を推定し、これにより推定した a_r と c_{jk} の最小二乗解を固定して、パラメータ b_r の最小二乗解を推定するという手順を、パラメータの推定値が収束するまで繰り返す交互最小二乗法 [10] のアルゴリズムを適用することもできる。このように、二段階の最小二乗法あるいは交互最小二乗法のアルゴリズムにより、パラメータ a_r と b_r と c_{jk} を推定することができるのである。

3. 情報理論におけるシャノン・エントロピーとエントロピー最大化モデル

情報理論の枠組みに従えば、確率 p_i で生起する事象 x_i（$i = 1, 2, \cdots, n$）から得られる平均情報量 E（＝シャノン・エントロピー）は、

$$E = -\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \log p_i \tag{3}$$

となる。ここで、p_{ri} を評定段階 i に対する評定者 r の選択比率とし、評定段階数 n を 5（5 段階評定）とすると、評定者 r の評定 p_{ri} から得られる情報量 E_r は (4) 式のように表される。

$$E_r = -\sum_{i=1}^{5} p_{ri} \cdot \log p_{ri} \tag{4}$$

(4) 式は、$p_{r1} = p_{r2} = \cdots = p_{r5} = 1/5$ のとき、$E_r = \log 5$ で最大となる。このとき、評定者 r がどの評定段階を選択するのかについて最もあいまいな（エントロピーが最大の）状態となる。

次に、評定者別の評定の平均 A_r のみが既知で、各評定段階の選択比率 p_{ri} は未知である場合に、p_{ri} を推定する問題を考えることにしよう。この問題は、「最大エントロピー原理」に従えば、(5) 式のように定式化される [2]。これが、評定者 r による評定データ全体の平均（マクロ情報）のみが既知の場合に、各評定段階 i の選択比率（ミクロ情報）を推定する「エントロピー最大化モデル」である。ただし、(5) 式の z_i は評定段階 i の尺度値であり、λ_r と μ_r はラグランジュ乗数である。

$$\varphi_r = -\sum_{i=1}^{5} p_{ri} \cdot \log p_{ri} + \lambda_r \left(\sum_{i=1}^{5} z_i \cdot p_{ri} - A_r\right) + \mu_r \left(\sum_{i=1}^{5} p_{ri} - 1\right) \rightarrow \max. \tag{5}$$

(5) 式は、評定者 r 別の評定の平均が A_r であるという制約条件（右辺第 2 項）と、選択比率 p_{ri} の和が 1 であるという制約条件（右辺第 3 項）のもとで、右辺第 1 項のシャノン・エントロピーを最大化するような選択比率 p_{ri} を推定する問題を示している。ただし、ここでは対数の底は、簡単のため e とする。

そこで、上記の選択比率 p_{ri} を推定すべく、φ_r を選択比率 p_{ri} で偏微分して 0 と置き、その式を整理することにより、(6) 式が得られる。

$$p_{ri} = w_r^{z_i} \Big/ \sum_{i=1}^{n} w_r^{z_i} \tag{6}$$

$$\text{ただし、} w_r = e^{\lambda_r} \tag{7}$$

ここで、(6) 式の右辺の分母を左辺に移項し、両辺に z_i をかけて i について足し込むことにより、(8) 式が得られる。

$$\left(\sum_{i=1}^{n} z_i \cdot p_{ri}\right) \cdot \sum_{i=1}^{n} w_r^{z_i} = \sum_{i=1}^{n} z_i \cdot w_r^{z_i} \tag{8}$$

左辺のカッコ内は A_r であるため、左辺のカッコ内を A_r で表し、その左辺を右辺に移項して、$w_r{}^{z_i}$ でくくることにより、(9) 式が得られる。

$$\sum_{i=1}^{n}(z_i - A_r)\cdot w_r{}^{z_i} = 0 \qquad (9)$$

そこで、(9) 式を満たす w_r を数値的に求め、その w_r を (6) 式に代入することにより、(5) 式を最大化する p_{ri} を推定することができるのである。

4. メンバーシップ値まわりのエントロピーとファジィ・エントロピー

ファジィ理論において、サンプル i（本研究では、評定段階）がファジィ集合に属するか否かについてのあいまいさの大きさは、(10) 式のようにメンバーシップ値まわりのエントロピー h_i によって表される。ただし、m_i はサンプル i がファジィ集合に属する度合いを表すメンバーシップ値であり、$0 \leqq m_i \leqq 1$ の値をとる。

$$h_i = -m_i\cdot\log m_i - (1-m_i)\cdot\log(1-m_i) \qquad (10)$$

メンバーシップ値まわりのエントロピー h_i は、$m_i = 0$ と $m_i = 1$ のとき $h_i = 0$ で最小となり、$m_i = 1/2$ のとき $h_i = \log 2$ で最大となる。

さらに、偶然性と漠然性といった、あいまいさの二面性 [11] が複合したファジィ・エントロピー F は、(11) 式のように表される。

$$F = -\sum_{i=1}^{n} p_i\cdot[m_i\cdot\log(p_i\cdot m_i) - (1-m_i)\cdot\log\{p_i\cdot(1-m_i)\}] / n \qquad (11)$$

ここで、もし n が一定であれば、(11) 式の分母の n を除去して考えることができる。そこで、分母の n を除去して、(11) 式を整理することにより、ファジィ・エントロピー F は、(12) 式のように、シャノン・エントロピー E と、メンバーシップ値まわりのエントロピー h_i の加重平均に分解することができる。

$$F = \sum_{i=1}^{n} p_i\cdot\log p_i + \sum_{i=1}^{n} p_i\cdot h_i = E + \sum_{i=1}^{n} p_i\cdot h_i \qquad (12)$$

5. 5段階評定の分布を模写するためのファジィ・エントロピー最大化モデル

本研究では、「最大エントロピー原理」に従った (5) 式のモデルを、ファジィ・エントロピー最

大化モデルへと拡張し、5段階評定の分布を模写することを試みる。そこで、評定段階 i の尺度値 z_i をメンバーシップ値 m_i に置き換えることにより、(13) 式のように定式化する。本研究における (13) 式のモデルは、筆者ら [12] の「ファジィ・エントロピーを用いた一因子情報路モデル」の問題領域を5段階評定に限定し、新たに評定者を表す添え字 r を導入した分析モデルである。

$$\begin{aligned}\Phi_r &= F+\lambda_r\left(\sum_{i=1}^{5} m_i\cdot p_{ri}-A_r\right)+\mu_r\left(\sum_{i=1}^{5} p_{ri}-1\right)\\ &= -\sum_{i=1}^{5} p_{ri}\cdot\log p_{ri}+\sum_{i=1}^{5} p_i\cdot h_i+\lambda_r\left(\sum_{i=1}^{5} m_i\cdot p_{ri}-A_r\right)+\mu_r\left(\sum_{i=1}^{5} p_{ri}-1\right)\ \rightarrow\ \max.\end{aligned} \tag{13}$$

(13) 式のメンバーシップ値 m_i は、評定段階 i が優れたパフォーマンスの集合（ファジィ集合）に属する度合い（帰属度関数 [1]）を表している。また、A_r はメンバーシップ値 m_i の加重平均であり、これはファジィ理論におけるファジィ事象の確率 [1] に相当する。

ここで、(13) 式を最大化する p_{ri} を推定すべく、(13) 式を p_{ri} で偏微分して0と置くと、(14) 式が得られる。

$$\delta\Phi_r／\delta p_{ri}=-\log p_{ri}-1+h_i+\lambda_r\cdot m_i+\mu_r=0 \tag{14}$$

したがって、$\log p_{ri}$ は (15) 式となり、p_{ri} は (16) 式となる。

$$\log p_{ri}=-1+h_i+\lambda_r\cdot m_i+\mu_r \tag{15}$$

$$p_{ri}=\exp(-1+h_i+\lambda_r\cdot m_i+\mu_r) \tag{16}$$

次に、ラグランジュ乗数 μ_r を消去すべく、(16) 式を i について足し込んだ式で、(16) 式を割ると、

$$p_{ri}=\exp(h_i+\lambda_r\cdot m_i)／\sum_{i=1}^{5}\exp(h_i+\lambda_r\cdot m_i) \tag{17}$$

となる。ここで、(7) 式と同様に、$\exp(\lambda_r)=w_r$ と置けば、(17) 式は (18) 式のように簡単な式となる。

$$p_{ri}=\exp(h_i)\cdot w_r^{\,m_i}／\sum_{i=1}^{5}\exp(h_i)\cdot w_r^{\,m_i} \tag{18}$$

さらに、(18) 式の右辺の分母を左辺に移項し、両辺に m_i をかけて i について足し込むことにより、(19) 式が得られる。

$$(\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot p_{ri}) \cdot \exp(h_i) \cdot \sum_{i=1}^{n} w_r^{\,m_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \exp(h_i) \cdot w_r^{\,m_i} \tag{19}$$

左辺のカッコ内はA_rであるため、左辺を右辺に移項して、$w_r^{\,m_i}$でくくり、左辺と右辺を入れ替えることにより、(20)式が得られる。

$$\sum_{i=1}^{n} (m_i - A_r) \cdot \exp(h_i) \cdot w_r^{\,m_i} = 0 \tag{20}$$

そこで、(20)式を満たすw_rを数値的に求め、そのw_rを(18)式に代入することにより、(13)式を最大化するp_{ri}を推定することができるのである。

ここで、本研究の(18)式を、最大エントロピー原理に基づく従来のモデルの(6)式と比較すると、(18)式は(6)式に対して$\exp(h_i)$で重みづけした式となっていることがわかる。そういった意味で、本研究の提案モデルは、最大エントロピー原理に基づく従来のモデルの自然な拡張形となっており、これより(18)式の解の妥当性を確認することができるのである。

6. 5段階評定の簡単な数値例を用いた寛大化傾向の分析

本研究の「ファジィ・エントロピーの最大化モデル」に対して、メンバーシップ値m_iの加重平均A_rの簡単な数値例を与え、互いにA_rが異なる5段階評定の分布を作成する。ただし、本研究における各評定段階のメンバーシップ値m_iは、「高いパフォーマンスを表す評定段階の集合に属する度合い」を意味し、m_iの値を$m_1 = 0$（評定段階E)、$m_2 = 0.1$（評定段階D)、$m_3 = 0.3$（評定段階C)、$m_4 = 0.7$（評定段階B)、$m_5 = 1$（評定段階A）に設定する。

次に、こうして作成した5段階評定の分布が、究極の寛大化傾向の分布に近いか、標準正規分布に近いかを、(21)式と(22)式のKL情報量[4], [5]によって定量的に分析する。

$$D_{1r} = \sum_{i=1}^{5} q_{1i} \cdot \log(q_{1i} / p_{ri}) \tag{21}$$

$$D_{2r} = \sum_{i=1}^{5} q_{2i} \cdot \log(q_{2i} / p_{ri}) \tag{22}$$

上記のKL情報量D_{1r}とD_{2r}は、2つの分布が近いほど小さく、離れているほど大きい値となるため、「乖離度」とも呼ばれる。

ただし、q_{1i}は究極の寛大化傾向における評定段階i別の選択比率（$q_{15} = 1$で、$q_{11} = q_{12} = q_{13} = q_{14} = 0$)、$q_{2i}$は標準正規分布を$\pm\sigma/2$と$\pm 3\sigma/2$（$\sigma$：標準偏差）で5つに分割した評定段階$i$別の選択比率である。これにより、標準正規分布の$q_{2i}$は、

q_{21} = 0.0668（評定段階 E），q_{22} = 0.2417（評定段階 D），q_{23} = 0.3830（評定段階 C），
q_{24} = 0.2417（評定段階 B），q_{25} = 0.0668（評定段階 A）

となる。

本研究における「5 段階評定のファジィ・エントロピー最大化モデル」により推定した評定段階 i の分布は、表 2 の通りである。

表 2. 本研究における Ar 別の分析結果（5 段階評定の分布）

評定者	A_r	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$
$r=1$	0.95	0.0003	0.0010	0.0064	0.1477	0.8446
$r=2$	0.90	0.0026	0.0063	0.0259	0.2454	0.7199
$r=3$	0.85	0.0076	0.0162	0.0522	0.3043	0.6197
$r=4$	0.80	0.0151	0.0298	0.0810	0.3381	0.5360
$r=5$	0.75	0.0249	0.0461	0.1102	0.3551	0.4638
$r=6$	0.70	0.0368	0.0646	0.1386	0.3600	0.3999
$r=7$	0.65	0.0507	0.0850	0.1657	0.3559	0.3427
$r=8$	0.60	0.0667	0.1069	0.1911	0.3444	0.2909
$r=9$	0.55	0.0847	0.1303	0.2142	0.3270	0.2438
$r=10$	0.50	0.1049	0.1549	0.2348	0.3045	0.2009

次に、上記の 5 段階評定の分布と、究極の寛大化傾向の分布、および標準正規分布を 5 つに分割した選択比率との間の KL 情報量（乖離度）を、(21) 式と (22) 式により求めると、表 3 のような結果となった。

表 3. 寛大化傾向および標準正規分布と 5 段階評定との乖離度（KL 情報量 D_{1r} と D_{2r}）

評定者	A_r	D_{1r}	D_{2r}
$r=1$	0.95	0.1689	3.1986
$r=2$	0.90	0.3287	1.9676
$r=3$	0.85	0.4785	1.3570
$r=4$	0.80	0.6235	0.9803
$r=5$	0.75	0.7684	0.7213
$r=6$	0.70	0.9165	0.5320
$r=7$	0.65	1.0710	0.3891
$r=8$	0.60	1.2348	0.2797
$r=9$	0.55	1.4114	0.1965
$r=10$	0.50	1.6049	0.1354

7. 考察

表2の分析結果を見ると、メンバーシップ値 m_i の加重平均 A_r（ファジィ事象の確率）が大きい評定者ほど、当然のことながら、$i = 5$ や $i = 4$ の評定段階の選択比率が高くなっていることがわかる。また、A_r が 0.70 以上では、$i = 5$ の評定段階の選択比率が最も高く、A_r が 0.50 〜 0.65 のときは、$i = 4$ の評定段階の選択比率が最も高くなっており、これらは現実に即した結果であろう。さらに、本研究のモデルによって推定された選択比率は、メンバーシップ値の加重平均 A_r を維持しながら、各評定段階に対してバランスよく配分されており、この結果は、A_r を維持したもとで（制約条件として）、ファジィ・エントロピー F_r を最大化することの妥当性を示している。

次に、表3の分析結果より、KL 情報量 D_{1r} と D_{2r} は、A_r が 0.80 以上（$r = 1$ 〜 4）では D_{1r} の方が小さく、A_r が 0.75 以下（$r = 5$ 〜 10）では D_{2r} の方が小さいことがわかる。そこで、D_{1r} と D_{2r} が等しくなる A_r（メンバーシップ値 m_i の加重平均 = ファジィ事象の確率）の値をシミュレーションにより求めると、$A_r \fallingdotseq 0.75638$ となった。この結果は、本研究のファジィ・エントロピー最大化モデルにより推定された分布（各評定段階の選択比率 p_{ri}）が、A_r が 0.75638 以上では寛大化傾向の分布に近く、A_r が 0.75638 未満では標準正規分布に近いということを示しており、妥当な結果であろう。これにより、A_r が 0.75638 以上のとき、ファジィ・エントロピー最大化モデルの枠組みで、寛大化傾向の評定の分布を模写していることがわかる。

以上のような本研究の分析結果から、メンバーシップ値の加重平均 A_r（マクロ情報）のみが既知で、各評定段階の選択比率 p_{ri}（ミクロ情報）が未知のときに、すべての評定段階に p_{ri} を与える（推定する）という、本来は結論が得られない拡大推論 [1] の問題に対して、本研究で提示したファジィ・エントロピー最大化の基準が、一つのアプローチとなりうることが示唆される。すなわち、与えられた証拠（メンバーシップ値の加重平均 A_r）のみでは本来は結論が得られないような拡大推論の問題に対して、本研究のファジィ・エントロピー最大化モデルが現実に即した解を与えるのである。

8. おわりに

本研究では、人事考課における5段階評定の分布に注目し、評定段階のメンバーシップ値の加重平均（マクロ情報）のみが既知で、各評定段階の選択比率（ミクロ情報）が未知の場合に、これらの選択比率を推定する拡大推論 [1] の問題を定式化することにより、選択比率の解を導くためのファジィ・エントロピー最大化モデルを提示した。その上で、評定段階のメンバーシップ値の加重平均（ファジィ事象の確率）と各評定段階のメンバーシップ値を与えたもとで、ファジィ・エントロピーを最大化する選択比率を推定した。これにより、本研究のファジィ・エントロピー最大化モデルによって推定された選択比率が、メンバーシップ値の加重平均を維持しながら、各評定段階に対してバランスよく配分されることを確認した。

さらに、こうして推定した選択比率の分布が、究極の寛大化傾向（評定段階 A の選択比率が 1 で、それ以外はすべて 0）に近いか、標準正規分布を $\pm\sigma/2$ と $\pm 3\sigma/2$ で 5 つに分割した分布に近いかを、KL 情報量 [4], [5] によって定量的に分析した。これにより、評定段階のメンバーシップ値の加重平均（ファジィ事象の確率）が、0.80 以上のとき寛大化傾向の分布に近く、0.75 以下では標準正規分布に近いという現実に即した結果が得られた。

以上のような本研究の分析により、与えられた証拠（メンバーシップ値の加重平均）のみでは、本来は結論が得られないような拡大推論の問題に対して、ファジィ・エントロピー最大化の枠組みで、寛大化傾向の分布を模写することができた。そういった意味において、本研究のファジィ・エントロピー最大化モデルの有効性を確認して、本研究を閉じることにしたい。

参考文献

[1] 西田俊夫，竹田英二：ファジィ集合とその応用，森北出版，1978

[2] Klir, G. J. and Folger, T. A. 著，本多中二訳：ファジィ情報学，日刊工業新聞社，1993

[3] 山下洋史：人的資源管理の理論と実際，東京経済情報出版，1996

[4] Kullback, S.and Leibler, R. A：“On information and sufficiency”, *Annals of Mathematical Statistics*, No.22, pp.79, 1951

[5] Kullback, S. : *Information Theory and Statistics*, John Wiley, 1959

[6] 山下洋史：非連続型評定尺度法における評定者の行動モデル，明大商学論叢，Vol.100，No.3，pp.29-41，2018

[7] 山下洋史：人的情報システムにおける評定傾向分析モデルの研究，早稲田大学博士（工学）学位論文 , 1992

[8] 山下洋史，尾関守：人事考課における評定傾向分析モデル，日本経営工学会誌，Vol.40，No.3，pp.177-182, 1989

[9] 山下洋史，大野高裕，尾関守：“ 人事考課における寛大化傾向・中央化傾向・厳格化傾向の定量的分析 ”，日本経営工学会誌，Vol.41，No.5，pp.336-341, 1990

[10] 高根芳雄：心理学における非計量データの解析，東京大学博士学位論文，1976

[11] 山下洋史：偶然性と漠然性に関するあいまいさの表現方法，山梨学院短期大学経営研究，No.3, 1994

[12] 山下洋史，尾関守：ファジィ・エントロピーを用いた一因子情報路モデル，経営情報学会春季大会予稿集，pp.191-194，1993