# A qualitative study of solutions to partial differential equations based on dynamical systems theory and geometric approaches

# ２０２２年度　理工学研究科

# 博士学位請求論文（要旨）

## A qualitative study of solutions to partial differential equations based on dynamical systems theory and geometric approaches

数学専攻
市田　優

### １　問題意識と目的

本博士論文の主目的は力学系理論および幾何学的アプローチに基づき，様々な偏微分方程式の特殊解の諸性質に迫ることである．このアプローチは偏微分方程式の特殊解が満たす常微分方程式系を導出し，それに対してポアンカレ型コンパクト化を適用するものである．これにより，導かれた常微分方程式系の無限遠まで含めたすべてのダイナミクスを明らかにすることができる．つまり，得られた無限遠ダイナミクスは，無限遠まで含めた平衡点同士をつなぐような接続軌道や無限遠まで含めた平衡点に対応する元の偏微分方程式の特殊な解の存在や形状に関する情報，漸近挙動に関する結果を導く．本博士論文では，この枠組みで用いられている手法の概要を説明するとともに，背景の異なる具体的な偏微分方程式各種に対して，このアプローチを用いることで，ある種統一的にこれまで明らかにされなかった解の定性的構造を明らかにしている．

力学系理論とは物事が時間とともに変化する様子を数学的に記述した概念である．Newton が微分方程式で質点の運動を記述して以来の解析力学を源流とするものであり，Poincaré が三体問題は解析的に解けないことを発見し，微分方程式の解の定性的性質を提唱したことで誕生した．Kuznetsov (Springer, 2004) によると，力学系理論に関する基本的な成果は 19 世紀末に Lyapunov と Poincaré によって得られたとされる．その後，様々な人文，社会，自然科学分野で研究され，常微分方程式，偏微分方程式，反復写像で記述された様々な発展的なプロセスに対する解析に力学系理論が有用であることが明らかとなった．今日，力学系理論に関する文献は膨大に存在し，現在もその手法の開発含め盛んに研究がなされている数学の１つの分野である．

本論文で取り扱う偏微分方程式や非線形な常微分方程式系は現代機械の多くに内蔵されている微小電気機械システムの弾性膜の運動，太陽フレアなどの天文物理学，細胞性粘菌の集中体形成，感染症の流行過程といった諸現象をモデル化したものを含んでいる．これらの現象は，複雑さの中から本質を抽出することで定式化され，数式の持つ普遍性が諸現象の新たな理解や予測，仮説の提供，派生した数学的問題をもたらし，新たな研究も生んできた．しかし，一般的に偏微分方程式，非線形な常微分方程式系には解の公式なるものが存在しないため，解を既知関数により表現することが期待できない．常微分方程式系では平衡点の存在や局所安定性，大域安定性などを調べるという解の定性的性質の解明が大きな仕事となる．一方，偏微分方程式の場合は未知関数が常微分方程式に比べて多変数となるため，一般的に常微分方程式系の解析よりも難しくなることが多い．

そこで，偏微分方程式における数学的な問題意識を説明しつつ，本研究の着眼点について整理する．例えば，数学的には，次のような問題が重要である．(1) 解の局所存在性などの適切性や可解性に関する純粋な数学として定式化された問題，(2) 特殊な解（時刻に依存しない解である定常解，波形を保ったまま一定速度で伝播する解である進行波解，相似な変換で不変な解である自己相似解など）の存在やその解構造に迫る問題，(3) 数値シミュレーションによる解の可視化に迫る問題やその数値スキームの開発，など．このように多く

の問題が存在し，これまでに多様な研究がなされてきた．いずれも相補的な関係であり，重要な問題である．しかしながら，ほとんどの既存の研究は個別の方程式の特徴に由来するものであり，統一的な視点からの構造解明や解析手法の構築は難しい．また，現象を支配するメカニズムを理解するためには，(2)や(3)における結果がしばしば要請される．現在では，現象を数学的な視点から理解するための第一歩である特殊な解の存在や諸性質を導く解析的な手法やそれが導く結果，数値解析による多様な結果が様々な数理モデルで示されてきた．ここで強調しておきたいことは，異なる方程式にも適用できる手法や特殊な解の分類（存在するものをすべて列挙すること）まで至った研究は少ないこと，そして，これらを解決する汎用的な解析手法の構築および整備は重要かつ発展性があると言える．そこで，本研究では，まず特殊な解に着目し，異なる方程式に対しても所望する解の存在性やプロファイルや漸近挙動といった諸性質を解明できるような統一的な手法を提案するとともに，具体的な方程式における豊富な結果が得られることを目指した．そして一般論への拡張や純粋な数学としての研究，現象への応用に向けた新たな視点の提供を目指すことにした．

次に本論文で重要な役割を果たす手法（上記の統一的な手法）の概要について説明する．この手法は偏微分方程式の調べる特殊解の満たす常微分方程式系が導出できた暁に適用されるものであることに注意されたい．Matsue（SIAM J. Appl. Dyn. Syst., 2018，以下「松江氏の論文」）によると，コンパクト化とは相空間に無限遠方を適切に付け加えてコンパクト多様体を作ることで，有界な解として爆発解を含む発散する解を考えることのできる手法である．最もよく知られているのは，ベンディクソン・コンパクト化（1 点コンパクト化とも呼ばれ，n 次元ユークリッド空間を n+1 次元の球面に埋め込む）とポアンカレ型コンパクト化（n 次元ユークリッド空間を n+1 次元の単位上半球に埋め込む）である．無限遠方が 1 点となるベンディクソン・コンパクト化より無限遠方の情報が豊富に調べられるポアンカレ型コンパクト化は，無限大を含む対象の様々な性質を理解する上で重要な役割を果たしている．元のベクトル場の持つ力学系的なスケーリング情報が関連する変換によって保持されるように適切なコンパクト化の種類を選択しなければならない．すなわち，ポアンカレ型コンパクト化とは，元のベクトル場が斉次である場合のポアンカレ・コンパクト化と，元のベクトル場が斉次でなく擬斉次のポアンカレ・リャプノフコンパクト化（松江氏の論文では指向的コンパクト化とも呼ばれる）を含むものである．松江氏の論文では常微分方程式系の爆発解の再構築のためにこの手法を整備している．

本博士論文では，ポアンカレ型コンパクト化とベクトル場の特異点膨らまし（blow-up technique）の手法について先行研究をもとに説明し，これらの手法を偏微分方程式の特殊な解の諸性質を調べるという松江氏の論文とは異なるこれまでにない新たな応用方法を提案する．さらに，背景の異なる MEMS 型反応拡散方程式，退化非線形放物型方程式，走化性方程式系などの実際の偏微分方程式の問題に適用することで，特徴的な解の存在，プロファイル，漸近挙動を統一的な手法で明らかにできることを示す．この論文で得られた結果は無限大を境界領域に写すコンパクト化と時間スケール変換の特異性解消の手法を用いることで，詳細な漸近挙動を持つ典型的な解の豊富な情報を与えている．請求者の知る限りでは，これらの方程式を力学系理論や幾何学的なアプローチで研究した例はなく，本研究の成果は，これらの視点から上記で述べた方程式を研究するための第一歩となるものである．さらに非線形な常微分方程式系（特に感染症の流行過程を記述する SIR 常微分方程式系モデル）に対してもこの手法は適用することで解の大域挙動の別証明，中心多様体定理を援用した基本再生産数と解の挙動の関連を指摘している．本研究成果は，これらの方程式の新たな知見に貢献するものであると確信し，新たな問題を開拓するものであり，今後のさらなる一般化や適用範囲の拡張が期待されるものである．

## 2　構成及び各章の要約

本論文の構成と簡単な各章の要約を述べる．Chapter 1 では，本論文を通して用いられる手法であるポアンカレ型コンパクト化，特異点膨らましについて先行研究をベースにして必要最低限の定義やその概略を与えている．特に，ポアンカレ・コンパクト化に関する変換の導出過程，ポアンカレ・コンパクト化とポアンカレ・リャプノフコンパクト化の使い分けで生じるベクトル場の（無限大における）漸近的擬斉次性に関す

る定義，ニュートン図形を用いた特異点膨らましにおける座標変換に関わる型の導出過程について説明している．

Chapter 2 以降では，Chapter 1 で説明した手法を用いた応用として具体的な偏微分方程式の特殊な解の諸性質を明らかにした結果について出版および投稿論文ごとに記述している．Chapter 2,4,7,8 は請求者による修士学位請求論文に含まれている．Chapter 5 は修士論文に含まれているが，本論文執筆に際して加筆および修正を加えていることに注意されたい．

Chapter 2 では，負冪の非線形性を有する空間 1 次元反応拡散方程式の急冷を伴う擬進行波の存在，形状に関する情報，漸近挙動に関する結果を与えている．この結果は先行研究で仮定されていた解の存在を負冪の冪を偶数に制限することで示し，先行研究よりも精密な漸近挙動を示した点で有意義である．Chapter 3 では，Chapter 2 で考えた方程式を一般化し慣性項を加えることで進行波解の形状の変化について，慣性項の係数だけでなく進行スピードも含む関係式という変化の境目を示している．Chapter 4 では，Chapter 2 で考えた方程式を含むような空間多次元での拡張された方程式の球対称定常解について，その存在や形状に関する情報，漸近挙動について議論している．Chapter 5 でも Chapter 2 の方程式の反応項に勾配項を加えた場合の定常解の振る舞いについて調べ，Chapter 6 ではその空間多次元版の方程式の球対称定常解について調べている．ここまでの Chapter 2 から Chapter 6 までの方程式はすべて MEMS 型偏微分方程式と呼ばれる方程式であり，微小電気機械システムという我々の生活で欠かすことのできない現代機械の多くに内蔵されているものが引き起こす現象に由来している方程式である．

Chapter 7 では，空間 1 次元退化非線形放物型方程式における進行波解に関する結果を述べている．この方程式は平面での自己交叉を有する曲線の時間発展問題である曲線短縮問題から出現した方程式であり，数学的には爆発解が存在し，その爆発レートを調べることが重要な問題の 1 つとされている．爆発レート導出の際にいくつかの研究結果から進行波解の挙動を調べることが鍵となることが指摘されている．本研究では爆発レート導出のための進行波解に関する研究を飛び出して，純粋な数学的興味から進行波解の構造について存在性の分類やそれらの諸性質の解明を目指した．Chapter 2 で述べた手法を組み合わせ，また，方程式に含まれるパラメータに制限を加えることにより，弱い意味も含めた進行波解の存在や形状に関する情報，漸近挙動を得ることができた．さらに，Chapter 8 では Chapter 7 で得ることができなかった一部の進行波解の陽的な漸近挙動をランベルトの $W$ 関数やこれまでにない漸近解析を行うことで明らかにした結果を述べている．そして，Chapter 9 では，ある変換の導入により，Chapter 7 で課した方程式に含まれるパラメータに関する制限を外すことに成功し，より一般的な結果を得ている．

Chapter 10 では，移流拡散方程式とポアソン方程式の連立系である細胞性粘菌の集中体形成現象を記述する走化性方程式系の球対称定常解に関する結果を述べている．これは先行研究で調べられた結果に着目し，まだ知られていない球対称定常解の形状に関する情報や漸近挙動を明らかにするものであり，特に，有限区間もしくは半無限区間で方程式を満たしていてその端点で発散するような関数の存在，形状に関する情報，漸近挙動に関する結果は新しく，走化性方程式系の解構造を調べる上で新たな視点を提供するものであろう．

最後の Chapter 11 では，Chapter 2 で説明したポアンカレ型コンパクト化の応用として常微分方程式系の無限遠ダイナミクスが解の大域挙動を与えていること，そしてそれを実際の感染症流行過程を記述する SIR モデルに適用して既知な結果との整合性を確かめた結果を述べている．また，標準形の変換と中心多様体理論を慎重に行うことにより，このモデルにおける基本再生産数に依存した感染者数の減衰レートを与えている点で新しく，新たな問題を生み出す結果を提示している．