A qualitative study of solutions to partial differential equations based on dynamical systems theory and geometric approaches

2023 年 2 月 13 日

「博士学位請求論文」審査報告書

審査委員　（主査）　理工学部　専任教授

氏名　　矢崎成俊

（副査）　理工学部　専任教授

氏名　　名和範人

（副査）　理工学部　専任教授

氏名　　今野宏

１　**論文提出者**　市田優

２　**論文題名**　A qualitative study of solutions to partial differential equations based on dynamical systems theory and geometric approaches

（和文題）　力学系理論および幾何学的アプローチに基づく偏微分方程式の解の定性的研究

３　**論文の構成**

当該論文は全１１章の章立てとなっている。第１章は導入であり，残りの第２章から第１１章までは，それぞれ論文提出者の単著もしくは共著による１０本の学術論文をベースにした章となっている。

第１章では，本論文を通して用いられる手法であるポアンカレ型コンパクト化，特異点膨らましについて先行研究をベースにして必要最低限の定義やその概略を与えている。特に，ポアンカレ・コンパクト化に関する変換の導出過程，ポアンカレ・コンパクト化とポアンカレ・リャプノフコンパクト化の使い分けで生じるベクトル場の（無限大における）漸近的擬斉次性に関する定義，ニュートン図形を用いた特異点膨らましにおける座標変換に関わる型の導出過程について説明している。

第２章以降では，第１章で説明した手法を用いた応用として具体的な偏微分方程式の特殊な解の諸性質を明らかにした結果について出版論文ごとに記述している。

第２章から第６章までの方程式はすべてMEMS型偏微分方程式と呼ばれる方程式であり，微小電気機械システムという我々の生活で欠かすことのできない現代機械の多くに内蔵されているものが引き起こす現象に由来している方程式である。

まず第２章では，負冪の非線形性を有する空間１次元反応拡散方程式の急冷を伴う擬進行

波の存在，形状に関する情報，漸近挙動に関する結果を与えている。この結果は先行研究で仮定されていた解の存在を負冪の冪を偶数に制限することで示し，先行研究よりも精密な漸近挙動を示した点で有意義である。

第３章では，第２章の方程式を一般化し慣性項を加えることで進行波解の形状の変化について，慣性項の係数だけでなく進行スピードも含む関係式という変化の境目を示している。

第４章では，第２章の方程式を含むような空間多次元での拡張された方程式の球対称定常解について，その存在や形状に関する情報，漸近挙動について議論している。

第５章では，第２章の方程式の反応項に勾配項を加えた場合の定常解の振る舞いについて調べ，第６章では，その空間多次元版の方程式の球対称定常解について調べている。

第７章では，第２章から第６章までに扱った方程式とは由来の異なる空間１次元退化非線形放物型方程式における進行波解に関する結果を述べている。この方程式は平面での自己交叉を有する曲線の時間発展問題である曲線短縮問題から出現した方程式であり，数学的には爆発解が存在し，その爆発レートを調べることが重要な問題の１つとされている。爆発レート導出の際にいくつかの研究結果から進行波解の挙動を調べることが鍵となることが指摘されている。当該論文では爆発レート導出のための進行波解に関する研究を飛び出して，純粋な数学的興味から進行波解の構造について存在性の分類やそれらの諸性質の解明を目指している。第２章で述べた手法を組み合わせ，また，方程式に含まれるパラメータに制限を加えることにより，弱い意味も含めた進行波解の存在や形状に関する情報，漸近挙動を得ている。続く第８章では第７章で得ることができなかった一部の進行波解の陽的な漸近挙動をランベルトのW関数やこれまでにない漸近解析を行うことで明らかにした結果を述べている。そして，第９章では，ある変換の導入により，第７章で課した方程式に含まれるパラメータに関する制限を外すことに成功し，より一般的な結果を得ている。

第１０章では，移流拡散方程式とポアソン方程式の連立系である細胞性粘菌の集中体形成現象を記述する走化性方程式系の球対称定常解に関する結果を述べている。これは先行研究で調べられた結果に着目し，まだ知られていない球対称定常解の形状に関する情報や漸近挙動を明らかにするものであり，特に，有限区間もしくは半無限区間で方程式を満たしていてその端点で発散するような関数の存在，形状に関する情報，漸近挙動に関する結果は新しく，走化性方程式系の解構造を調べる上で新たな視点を提供するものである。

最終第１１章では，第２章で説明したポアンカレ型コンパクト化の応用として常微分方程式系の無限遠ダイナミクスが解の大域挙動を与え，その結果を実際の感染症流行過程を記述するSIRモデルに適用して既知な結果との整合性を確かめた結果を述べている。また，標準形の変換と中心多様体理論を慎重に行うことにより，このモデルにおける基本再生産数に依存した感染者数の減衰レートを与えている点で新しく，新たな問題を生み出す結果を提示している。

4　論文の概要

当該論文は，さまざまな偏微分方程式の特殊解の性質を，力学系理論と幾何学的アプローチに基づいて明らかにすることを目的としている。特に，無限遠での挙動も含む偏微分方程式の特殊解が満たす常時偏微分方程式系の力学を，ポアンカル型コンパクト化によって，解

の定性的な構造を明らかにするという統一的な方法を用いていることが特徴である。扱った偏微分方程式は，化学反応，生物種間の生存競争，太陽フレアなどの天体物理現象，微小電気機械系における弾性膜の運動などのモデルとして発展してきたものである。一般的に，これらの非線形偏微分方程式を陽な形で解くことは期待できないため，特殊解の存在や解の定性的な挙動を呈示することになるが，その手法は個別問題に終始していた。当該論文において，論文提出者は，特にポアンカレ型コンパクト化の手法を用いて，さまざまな方程式に適用できる統一的な解析手法を提供し，数学解析における新たな展望を提供した。

５　論文の特質

当該論文の主目的は力学系理論および幾何学的アプローチに基づき，様々な偏微分方程式の特殊解の諸性質に迫ることである。このアプローチは偏微分方程式の特殊解が満たす常微分方程式系を導出し，それに対してポアンカレ型コンパクト化を適用するものである。これにより，導かれた常微分方程式系の無限遠まで含めたすべてのダイナミクスを明らかにすることができる。つまり，得られた無限遠ダイナミクスは，無限遠まで含めた平衡点同士をつなぐような接続軌道や無限遠まで含めた平衡点に対応する元の偏微分方程式の特殊な解の存在や形状に関する情報，漸近挙動に関する結果を導く。当該論文では，この枠組みで用いられている手法の概要を説明するとともに，背景の異なる具体的な偏微分方程式各種に対して，このアプローチを用いることで，ある種統一的にこれまで明らかにされなかった解の定性的構造を明らかにしていることが当該論文の特質である。

一般に，上述したように，非線形偏微分方程式は陽な形で解くことは期待できない。ではそのような方程式に対して，どのような心構えでアプローチすればよいのだろうか。それに関する当該論文における着眼点を整理しておこう。例えば，数学的には，次のような問題が重要である。（１）解の局所存在性などの適切性や可解性に関する純粋な数学として定式化された問題，（２）特殊な解（時刻に依存しない解である定常解，波形を保ったまま一定速度で伝播する解である進行波解，相似な変換で不変な解である自己相似解など）の存在やその解構造に迫る問題，（３）数値シミュレーションによる解の可視化に迫る問題やその数値スキームの開発，など。このように多くの問題が存在し，これまでに多様な研究がなされてきたが，多くの既存の研究は個別の方程式の特徴に由来するものである。一般に，非線形の問題を統一的な視点で構造を解明し，解析手法を構築することは難しい。このように異なる方程式にも適用できる手法や特殊な解の分類（存在するものをすべて列挙すること）まで至った研究は少ないため，これらを解決する汎用的な解析手法の構築および整備は重要かつ発展性があるといえる。

当該論文では，ポアンカレ型コンパクト化とベクトル場の特異点膨らまし（blow-up technique）の手法について先行研究をもとに説明し，これらの手法を偏微分方程式の特殊な解の諸性質を調べるという先行研究とは異なるこれまでにない新たな応用方法を提案している。さらに，背景の異なるMEMS型反応拡散方程式，退化非線形放物型方程式，走化性方程式系などの実際の偏微分方程式の問題に適用することで，特徴的な解の存在，プロファイル，漸近挙動を統一的な手法で明らかにできることを示している。当該論文で得られた結果は無限大を境界領域に写すコンパクト化と時間スケール変換の特異性解消の手法を用いるこ

とで，詳細な漸近挙動を持つ典型的な解の豊富な情報を与えている。これらの方程式を力学系理論や幾何学的なアプローチで研究した例は恐らくないであろう。したがって，当該論文の研究成果は，これらの視点から上記で述べた方程式を研究するための第一歩となるものといえる。さらに非線形な常微分方程式系（特に感染症の流行過程を記述するSIR常微分方程式系モデル）に対してもこの手法は適用することで解の大域挙動の別証明，中心多様体定理を援用した基本再生産数と解の挙動の関連を指摘している。

６　論文の評価

上述したように，当該論文は，全１１章の章立てとなっていて，第１章の導入以外の第２章から第１１章までの１０の章は，それぞれ論文提出者の単著もしくは共著による１０本の学術論文が骨格となっている。２０２３年1月１６日付けで上記１０本すべての論文が出版済みとなったことを注記しておく。すべての論文は査読付き論文であるため，各章ごとに，ある一定の評価が客観的に保証されているといえよう。

当該論文で扱っている偏微分方程式や非線形常微分方程式系はいずれも厳密に解を求めることはできない。そこで当該論文では，まず特殊な解に着目し，異なる方程式に対しても所望する解の存在性やプロファイルや漸近挙動といった諸性質を解明できるような統一的な手法を提案するとともに，具体的な方程式における豊富な結果が得られることを目指している。その結果，一般論への拡張や純粋な数学としての研究，現象への応用に向けた新たな視点の提供がなされた。

以上より，当該論文は，新規性，独自性，普遍性，そして将来性がある学術的価値の高い論文であると結論する。

７　論文の判定

本学位請求論文は，理工学研究科において必要な研究指導を受けたうえ提出されたものであり，本学学位規程の手続きに従い，審査委員全員による所定の審査及び最終試験に合格したので，博士（理学）の学位を授与するに値するものと判定する。

以　上

主査氏名（自署）