２０２２年度　先端数理科学研究科

博士学位請求論文（要旨）

A study on the one-row colored $\mathfrak{sl}_3$ Jones polynomials and tails for pretzel links

先端メディアサイエンス専攻

川添　浩太郎

１　問題意識と目的

量子不変量とは，リー代数$\mathfrak{g}$とその既約表現Vを用いて構成される結び目の不変量である．特に，$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$と既約表現$V = \mathbb{C}^2$の時は Jones 多項式と呼ばれ，これは 1984 年に Jones によって発見された．また，Kauffman は, Kauffman ブラケットを用いて Jones 多項式を再定式化した．これによって Jones 多項式を図形的に計算することが可能となった．さらに, Jones 多項式を一般化したものとして，色付き Jones 多項式を考える事ができる．これは，リー代数$\mathfrak{sl}_2$とその$n+1$次元既約表現V_{n+1}から構成される．Jones 多項式と同様に Jones-Wenzl 冪等元と Kauffman ブラケットを用いることによって色付き Jones 多項式を図形的に計算することが可能であり，多くの結び目，絡み目に対して結果が知られている．また，これらの結果は, Kashaev により提唱された体積予想, Garoufalidis により提唱された Jones スロープ予想, tail と呼ばれる極限の存在等多くの関連するテーマの研究の助けとなっている．特に，本論文でも取り扱う tail とは, Dasbach と Lin によって最初に予想されたものであり，色付き Jones 多項式の q の係数に安定性があるときに存在が保証される色付き Jones 多項式の極限である. Armond は, adequte 結び目に対して tail の存在を証明しており, Garoufalidis と L$\hat{e}$は tail が存在するときよりより強い色付き Jones 多項式の係数の安定を交代結び目に対して証明している．また，様々な結び目に対して色付き Jones 多項式の結果を用いることによって具体的に tail の形が知られている．一方で，リー代数$\mathfrak{sl}_2$の時と同様にリー代数$\mathfrak{sl}_3$とその既約表現$V_{(n,m)}$を用いても色付き Jones 多項式を構成できることが知られている．しかし、その計算についてはリー代数$\mathfrak{sl}_2$の場合より複雑であり，二橋絡み目，トーラス絡み目$T(2,2m)$，トーラス結び目$T(2,2m+1)$のみにしか結果が存在していない．リー代数$\mathfrak{sl}_3$の色付き Jones 多項式は，計算結果が少ないがゆえに，リー代数$\mathfrak{sl}_2$の色付き Jones 多項式で成立していた性質が成り立つか未知である点が多く存在している．したがって，リー代数$\mathfrak{sl}_3$の色付き Jones 多項式に関してより多くの絡み目に対して計算結果を増やす必要がある．

本論文の目的は，絡み目の不変量であるリー代数$\mathfrak{sl}_3$の色付き Jones 多項式についてこれまで計算されていない絡み目に対して具体的な計算結果とそれに必要なA_2ウェブに関する新たな計算公式を得る事である．具体的には,リー代数$\mathfrak{sl}_3$の色付き Jones 多項式が計算されていない結び目8_5等を含むプレッツェル絡み目に対して，リー代数$\mathfrak{sl}_3$の色付き Jones 多項式の計算結果を得ることである．一般にリー代数$\mathfrak{sl}_3$の色付き Jones 多項式を得るのは計算の複雑さ故に困難であるのだが，本論文ではリー代数$\mathfrak{sl}_3$の既約表現$V_{(n,m)}$を既約表現$V_{(n,0)}$に制限することで，一行$\mathfrak{sl}_3$色付き Jones 多項式として Kuperberg によって導入されたA_2ブラケットとA_2クラプスを用いて図形的な手法により計算を行う．A_2ブラケットとA_2クラプスは，それぞれリー代数$\mathfrak{sl}_2$の色付き Jones 多項式における Kauffman ブラケットと Jones-Wenzl 冪等元の役割を果たしている．このプレッツェル絡み目に対して一行$\mathfrak{sl}_3$色付き Jones 多項式の計算を実現するためにA_2ウェブに関して二つ新たな計算公式を得る必要があり，その導出も行う．また，結び目8_5を含む交代プレッツェル絡み目に関して，リー代数$\mathfrak{sl}_2$の色付き Jones 多項式では tail と呼ばれる極限が存在していることが知られている．そのため,

一行$\mathfrak{sl}_3$色付きJones多項式においても，交代プレッツェル絡み目に対してtailが存在していることが予想された．実際に，交代プレッツェル絡み目に対して一行$\mathfrak{sl}_3$色付きJones多項式の計算を行い，その多項式のqの係数をMathematicaによって確認するとtailが存在するときの係数の安定性を確認することができる．加えて，結び目8_5のtailに関しては，リー代数$\mathfrak{sl}_2$の色付きJones多項式においてもtailが量子モジュラー形式でどのように書けるかが不明である．以上の事より，交代プレッツェル絡み目に対して，一行$\mathfrak{sl}_3$色付きJones多項式のtailが存在していることの証明を行う．

2　構成及び各章の要約

本論文は，全部で5章によって構成されている．

序章では，色付きJones多項式の研究の背景と二つの主定理についての紹介を行う．主定理1は，全てのパラメーターが奇数である場合を除く3パラメーターで表されるプレッツェル絡み目に対する一行$\mathfrak{sl}_3$色付きJones多項式の具体的な式を与えている．主定理1の結果には，結び目8_5，8_{19}の一行$\mathfrak{sl}_3$色付きJones多項式が含まれている．結び目8_5，8_{19}は，それぞれ三橋結び目でありトーラス結び目$T(2,2m+1)$ではないことが知られている．これまで一行$\mathfrak{sl}_3$色付きJones多項式は二橋絡み目，トーラス絡み目$T(2,m)$の場合のみ計算結果が知られている．すなわち，主定理1は，これまで一行$\mathfrak{sl}_3$色付きJones多項式が計算されていない結び目を含む結果となっている．主定理2は，主定理1の結果を用いることで全てのパラメーターが奇数である場合を除く3パラメーターで表される交代プレッツェル絡み目に対する一行$\mathfrak{sl}_3$色付きJones多項式を適切に正規化した場合にtailが存在することを与えている．

第一章では，一行$\mathfrak{sl}_3$色付きJones多項式を計算する際に用いるKuperbergにより導入されたKuperberg線型スケイン理論の紹介と，A_2ウェブに関するこれまでに知られている計算公式の導入を行う．

第二章では，まず，主定理1の証明で鍵となる二つのA_2ウェブに対する新しい計算公式を与えている．一つ目は，紐の向きが同調しているm回のハーフツイストを解消する計算公式である．また，この計算公式によりトーラス絡み目$T(2,m)$に対して一行$\mathfrak{sl}_3$色付きJones多項式が得られ，Mathematicaを用いて$m=1\sim7, n=1\sim10$まででGaroufalidis, Morton, Voung, Yuasaらによって与えられたトーラス絡み目$T(2,m)$の結果と一致することを確認している．二つ目は，Yuasaによって与えられたbubble skein expansion formulaに関してプレッツェル絡み目の計算に適用できる形に拡張した計算公式である．これら二つの計算公式は，一章で紹介した多くのA_2ウェブの計算公式を適切に適用することによって証明している．次に，主定理1の証明を与えている.この証明には，先ほど紹介した2つの計算公式とこれまで知られているA_2ウェブの計算公式を組み合わせる事によって実現している．また，Mathematicaを用いて$n=1\sim10$において，結び目4_1，6_2，8_2をYuasaによって与えられた二橋結び目の一行$\mathfrak{sl}_3$色付きJones多項式を与える定理で計算した結果と，主定理1を用いてプレッツェル結び目として一行$\mathfrak{sl}_3$色付きJones多項式を計算した結果が一致することを確認する．特に，結び目4_1に関して，リー代数$\mathfrak{sl}_2$の色付きJones多項式ではqをq^{-1}と入れ替えた多項式が一致することが知られており，一行$\mathfrak{sl}_3$色付きJones多項式でも同様にqをq^{-1}と入れ替えた多項式が一致することをMathematicaでの計算で確認することができる．また，主定理1は3パラメーターのプレッツェル絡み目に対する一行$\mathfrak{sl}_3$色付きJones多項式の結果であるが，同じような計算方法によって全てが奇数であることを除くnパラメーターのプレッツェル絡み目に対しても一行$\mathfrak{sl}_3$色付きJones多項式を与えることができる．実際に，この章の最後では，4，5パラメーターで表されるプレッツェル結び目で表される結び目8_{10}，8_{15}，8_{20}，8_{21}についても一行$\mathfrak{sl}_3$色付きJones多項式を与えている．この結果と主定理1とYuasaによって与えられた2橋結び目に対する結果を合わせることによって，プレッツェル結び目でない結び目8_{16}，8_{17}，8_{18}を除く全ての8交点以下の全ての結び目に対して一行$\mathfrak{sl}_3$色付きJones多項式が与えられる．

第三章では，まず，主定理1で与えた一行$\mathfrak{sl}_3$色付きJones多項式にtailが存在する証明を行うための正規化に必要である交代プレッツェル結び目の一行$\mathfrak{sl}_3$色付きJones多項式のqの最低次数を与えている．ただし，この最低次数は交代プレッツェル結び目の一行$\mathfrak{sl}_3$色付きJones多項式を$Z[[q^{\pm}]]$の元に拡張した場合の最低

次数である．この一行$\mathfrak{sl}_3$色付き Jones 多項式の最低次数を用いて，一行$\mathfrak{sl}_3$色付き Jones 多項式が$Z[[q]]$の元になるように正規化を行う．次に，主定理 2 の証明を行っている．$Z[[q]]/q^{n+1}Z[[q]]$において，交代プレッツェル結び目に対する既約表現$V_{(n,0)}$における正規化した一行$\mathfrak{sl}_3$色付き Jones 多項式と既約表現$V_{(n+1,0)}$における正規化した一行$\mathfrak{sl}_3$色付き Jones 多項式をそれぞれ同様の式まで変形することによって証明している．最後に，主定理 1 と主定理 2 を用いてすべてのパラメーターが偶数である交代プレッツェル絡み目の一行$\mathfrak{sl}_3$色付き Jones 多項式の tail を具体的に与える．

付録では，主定理の証明では使用しないA_2ウェブに関する計算公式を紹介する．まず，紐の向きが同調している 2m+1 回のハーフツイストを解消する計算公式与えている．この計算公式の証明方法に関しては，三章で証明した紐の向きが同調しているm回のハーフツイストを解消する計算公式とほぼ同様の方法で証明することができる．この計算公式を用いることによっても主定理 1 と同様にすべてのパラメーターが奇数である場合を除く 3 パラメーターで表されるプレッツェル絡み目に対して一行$\mathfrak{sl}_3$色付き Jones 多項式を得ることができる．主定理 1 と異なりパラメーターの偶奇により，この計算公式と Yuasa によって与えられた紐の向きが同調しているm回フルツイストを解消する公式を使い分ける必要がある．ただし，Mathematica で計算を行う際はこの計算公式を用いて一行$\mathfrak{sl}_3$色付き Jones 多項式を計算したほうが主定理 1 より Σ の個数が少ないためより速く計算が可能である．最後に，紐の向きが異なる 2m+1 回のハーフツイストを解消する計算公式を与えている．この計算公式は，本論文では計算されていない全てのパラメーターが奇数であるプレッツェル結び目の一行$\mathfrak{sl}_3$色付き Jones 多項式を計算する際に用いることを想定している．