２０２３年１月１３日

「博士学位請求論文」審査報告書

審査委員　（主査）　総合数理学部　専任教授

氏名　　鈴木　正明　　㊞

（副査）　総合数理学部　専任教授

氏名　　河野　俊丈　　㊞

（副査）　総合数理学部　専任教授

氏名　　阿原　一志　　㊞

１　論文提出者　　川添　浩太郎

２　論文題名　　A study on the one-row colored sl_3 Jones polynomials and tails for pretzel links

（和文題）　プレッツェル絡み目に対する一行色付き sl_3 ジョーンズ多項式とテイルに関する研究

３　論文の構成

この博士学位請求論文は、序論と 1 章から 3 章があり、さらに付録から構成される。

序論では、まず本論文の主題である一行色付き sl_3 Jones 多項式がどのように研究されてきたかを述べている。一般に、色付き sl_3 Jones 多項式は次数と呼ぶべきパラメータを二つ持つが、本論文では片方が 0 であるときの考察を行っている。これを一行色付き sl_3 Jones 多項式と呼ぶ。この場合に限ってもこれまでの先行研究で計算されているのは、トーラス絡み目や 2 橋絡み目と呼ばれる、特別な絡み目のクラスのみであったことが述べられている。また、本論文での主定理が簡潔に述べられている。すなわち、まず 3-プレッツェル絡み目の定義を確認し、それらの向きに関する記法を定義し、一行色付き sl_3 Jones 多項式がどのように与えられるかを細かい記号の定義をせずに述べている。また 8_5 と記述される結び目については具体的に n=1,2,…,10 についての一行色付き sl_3 Jones 多項式を与えている。さらにもう一つの主定理として、これらの 3-プレッツェル絡み目について、テイルが存在するということが述べられている。

1 章では、Kuperberg による A_2 の線型スケイン理論について述べられている。これらは本

論文の主定理を得るために必要な定義と先行研究によって証明されているものである。具体的には以下のとおりである。まず量子整数の定義を述べ、それらの Ohtsuki-Yamada によるいくつかの公式を紹介している。次に A_2 web 空間や 1 価 3 価グラフの同値などを確認した上で、Kuperberg の A_2 bracket と type (n,0)の A_2 クラプスを定義し、Ohtsuki-Yamada による基本的な性質、そして Yuasa による特に type(n,0)に限定した性質を述べている。さらに stair-step と triangle と呼んでいるタイプについても定義し、基本的な性質を述べている。これらをもとに、Yuasa による m 回 full twist を展開する公式などを紹介している。これらの公式はこの研究の出発点となる先行研究であり、2 章でも重要な役割を果たす。

2 章では、一つ目の主定理の主張とその証明を行っている。まず 1 章で述べられている Yuasa による A_2 クラプスの性質には含まれない、A_2 クラプスの性質 Proposition 2.1.1 を証明している。これは m 回 half twist を展開する公式で、前述の Yuasa の公式をさらに一般の場合に拡張した新しい結果となっている。次に本論文の主題である一行色付き sl_3 Jones 多項式を Yuasa による図式を用いた方法で定義する。先ほどの Proposition 2.1.1 を用いると、(2,m)トーラス絡み目の一行色付き sl_3 Jones 多項式を計算することができる。これは Yuasa や Garoufalidis-Morton がそれぞれ独立な手法で計算しているものであるが、彼らの結果と Proposition 2.1.1 による計算を独立に行い、結果が同じになることを確認している。さらに Proposition 2.1.6 では別の A_2 クラプスの公式を証明している。唐突に特殊な公式を与えているようにも見えるが、これも主定理を証明することに本質的な役割を果たす。次に主定理である 3-プレッツェル絡み目の一行色付き sl_3 Jones 多項式の公式を与えて、それを証明する。証明では先行研究で知られている A_2 クラプスの公式と今回得られた Proposition 2.1.1 と 2.1.6 などを使って、図式を変形していくという方針である。証明の後にいくつかの具体例を Mathematica により計算している。さらに同様な方法で 4-,5-プレッツェル結び目である 8_10, 8_15, 8_20, 8_21 の計算も行っている。

3 章では、二つ目の主定理である一行色付き sl_3 Jones 多項式のテイルについて考察が進められる。まず一つ目の主定理を使って 3-プレッツェル絡み目の一行色付き sl_3 Jones 多項式の最小次数を決定している。色付き Jones 多項式のテイルは最小次数が 0 次、すなわち定数項になるように正規化したものに対して定義されることから、最小次数を決定しておく必要がある。その上で、テイルと呼ばれる一行色付き sl_3 Jones 多項式の安定性を証明している。これは次数が小さいところでは係数が安定することを表す。これを証明するために一行の次数が一つ大きくなると、各係数がどのように変化するかを詳しく調べている。さらにこれらのことを用いて安定的に係数がどのようになるかを決定している。最後に具体例を Mathematica を用いて計算している。

付録では、本論文の主定理の証明に直接は使わないが、得られている A_2 クラプスの公式を挙げている。具体的には奇数回数の half twist を展開する公式で、2 本のひもの向きが同じものと違うものについてである。また、それを使った一つ目の主定理の特別な場合の証明を与えている。

4　論文の概要

この博士学位請求論文における研究対象は、一行色付き sl_3 Jones 多項式であり、その

3-プレッツェル絡み目に対する結果や、それによりテイルの存在を証明している。もう少し詳細に概要を述べる。

色付き Jones 多項式は量子不変量と呼ばれるもののひとつである。量子不変量は 1990 年に Jones がフィールズ賞を受賞することになる理論から発生し、同じく 1998 年にフィールズ賞を受賞した Kontsevich が統一的な理論を構築している。この一例となっている色付き Jones 多項式は結び目の不変量としての強力さだけでなく、結び目のいろいろな性質を表すものとして、現在も体積予想や slope 予想と呼ばれる未解決問題に深く関連している。歴史的には、まず Jones 多項式が定義され、さらにそれを拡張する形で色付き Jones 多項式が定義されている。これはリー代数 sl_2 に対応する Jones 多項式ととらえることができ、その次数が色と呼ばれる。これまで活発に研究されてきた色付き sl_2 Jones 多項式の計算はとても複雑であるが、本論文ではリー代数 sl_3 に対応する色付き sl_3 Jones 多項式について考察をしており、次元の高いリー代数を使うこともあり、さらに複雑さは増している。その複雑さのために、具体的な計算などはこれまでほとんど得られていなかったが、本論文では 2 変数のうち片方を 0 に制限することにより、一行色付き sl_3 Jones 多項式として 3-プレッツェル絡み目について計算を行っている。本論文の結果により一行色付き sl_3 Jones 多項式が計算できる絡み目が爆発的に増大したことになり、実際 8_16, 8_17, 8_18 以外のすべての 8 交点以下の結び目に対して一行色付き sl_3 Jones 多項式を決定したことになる。この 8_16, 8_17, 8_18 については 2 橋結び目でもプレッツェル絡み目でもないことが知られている。

さらに、この結果を用いて一行色付き sl_3 Jones 多項式の安定性について考察している。一行の次数を一つずつ上げていくと多項式の次数の小さいものから順に係数が安定していくというのがテイルという概念である。色付き sl_2 Jones 多項式については多くの絡み目に対してテイルが存在する、すなわち係数が安定するということが知られている。しかし、一行色付き sl_3 Jones 多項式について同様な性質は知られていない。これを前述の一行色付き sl_3 Jones 多項式の決定を用いて 3-プレッツェル絡み目に対して証明し、どのように安定するかを与えている。

5　論文の特質

一般に色付き sl_3 Jones 多項式は組みひも群 B_n の表現論を用いて、行列のトレースとして定義されるが、行列のサイズが n についての指数関数として増大するので、具体的に n の式で表すことは困難である。実際、その手法で計算されている例は非常に限られた場合についてのみである。本論文ではその手法を取らずに、Yuasa が用いた方法と同様に、図式を用いる手法を取っている。それをするために、これまで知られていなかった A_2 クラプスにおける性質をいくつも証明している。具体的な小さい次数における式は単純でも、一般の次数では一つ一つがかなり複雑で、さらにそれらが複数にわたる文字の和で表される式となっている。さらに係数も量子整数と呼ばれるそれ自体が複雑な式で定義されるものを多数組み合わせて表されている。それらの複雑さにもかかわらず、巧みに一行色付き sl_3 Jones 多項式の計算を成功させている。本論文で対象とした 3-プレッツェル絡み目は特殊な場合に 2 橋絡み目となることがあり、それらの絡み目については本論文で得られている結果と先行研究で得られている結果で、見た目の異なる 2 通りの結果を得たことになる。これらのいくつ

かについては、同じ結果になっていることを Mathematica により示している。また、前述の理由で各係数を調べることは容易ではないが、その性質や次数の考察により、係数の現れ方の性質であるテイルの存在を証明している。

6　論文の評価

この博士学位請求論文は、これまで計算が出来なかった絡み目について一行色付き sl_3 Jones 多項式を計算することを可能にしており、また本論文で紹介されている手法により直接本論文では取り上げられていない絡み目についても計算できることを示唆している。これにより、多くの絡み目のクラスについて一行色付き sl_3 Joes 多項式を計算できたことになる。さらにこれらの結果により、これまで知られていた色付き sl_2 Jones 多項式のテイルについてだけではなく、これまでほとんど知られていない一行色付き sl_3 Jones 多項式のテイルという係数の安定性の存在を明らかにしている。

これらの結果は関連する研究を行う研究者においても、とても有用な結果であり、これらの学術的な価値は非常に高い。

7　論文の判定

本学位請求論文は、先端数理科学研究科において必要な研究指導を受けたうえ提出されたものであり、本学学位規程の手続きに従い、審査委員全員による所定の審査及び最終試験に合格したので、博士（数理科学）の学位を授与するに値するものと判定する。

以　上