２０１９年度　理工学研究科

博士学位請求論文（要旨）

Spatio-Temporal Patterns in the Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications to Analysis of Phenomena

数学専攻
小林　俊介

1. 問題意識と目的

時空間におけるパターン形成は，様々な現象において観測される．そして，それらへ対する理解と再現のため，自然科学の諸分野において数理モデルが活用されている．例えば，神経伝達パルス，BZ 反応，動物の表皮模様，細胞極性，腫瘍形成，生物種の密度分布，感染症の拡がりなど，多様な現象の再現あるいは予測のために反応拡散方程式系がしばしば用いられる．また，異なる二つの媒質や状態の境目の数学的記述方法として界面方程式は有用であり，雪の結晶成長，Hele-Shaw セル中における流体の挙動に関する流体現象，赤血球の形状の決定など，様々な工学・医学的応用がある．もちろん，上記以外にも，熱対流問題や蜂の巣に代表されるような六角パターンなど，身の回りの現象に現れるパターンは枚挙に遑がなく，様々な数理モデルが提案されている．

パターン形成問題に対する先駆的な業績として，A. M. Turing の１９５２年における論文（A. M. Turing, The chemical basis of morphogenesis, *Bulletin of mathematical biology*, **52** (12) : 153-197, 1952）が挙げられる．彼は，濃度の不均一性を解消する効果を持つ拡散が，相互作用の効果を導入すると空間対称性の破れを引き起こしうることを，活性因子–抑制因子系と呼ばれる，ある二成分反応拡散系に対する線型化不安定性解析を基に理論的に説明した．彼により説明されたパターン形成機構は，数学的には Turing 不安定性，または拡散誘導不安定性として良く知られている．Turing は，拡散誘導不安定性が化学的な基礎となって，空間一様な対称性が崩れ，生物の複雑な形態形成が行われると仮説を立てた．Turing による仮説は，活性因子と抑制因子が同定されていないことも相まって，長い間実験的に十分な証拠を得られぬままであった．しかし，近年になり，いわゆる Turing パターンと呼ばれるようなストライプパターンや六角形パターン，そしてスポットパターンのみならず，より複雑な時空間パターンが化学反応や生物実験によって観測されている．

さて，数理モデルに対する研究目標は，研究者の立場や分野によって異なることがしばしばである．上述のように，数理モデルを通して現象を理解するためには，数理モデルがもつ解の性質，及び解による現象の再現性を重要視し，解の具体的な情報が必要となるだろう．しかし，数学的な視点からは，非線型偏微分方程式を一般に解くことは不可能であるという顕著な事実により，解の存在性や一意性，滑らかさなどといった基礎研究に注力することになる．したがって，解の詳細なプロファイルとその時間発展などを得るためには，その大部分を数値シミュレーションによる可視化に頼らざるを得ないのが現状である．

本博士論文では，反応拡散方程式系や界面方程式を対象に，精密に解の定性的性質を調べることを目的としている．すなわち，解の形状や安定性，漸近挙動といった解の情報を，力学系理論などを適用することで明らかにする．これは，数理モデルに含まれるパラメータの変化に伴って，解構造がどのように変容するかを，分岐解析により解明することを意味する．特に，中心多様体理論と標準形理論に基づく局所分岐解析が

本論文の主な研究手法となる．こうした力学系の分岐理論は，不安定化のメカニズムを理解するための最も重要な数学的ツールの一つである．実は，分岐構造は方程式や境界条件に由来する対称性により決定され，それ故，分岐理論を基づいた解構造の分類は有効である．これは，異なる現象に現れるパターン形成のメカニズムを，一つの方程式で解明できる可能性を秘めていることを意味する．勿論，分岐解析は基本的に分岐点近傍に焦点を当てているため，数理モデルの全ての解のダイナミクスを明らかにできる訳ではない．それに加え，分岐解の安定性や枝の向きを詳細に調べるには，個々の方程式毎に計算を行う必要性がある．そうだとしても，実験などでは未だ観測されていない現象に対応するような解の存在を数学的に証明できることには，大きな意義がある．実際，本博士論文における第二章では，床面近傍に設置された紙のすす燃焼を題材に，燃焼波面の挙動には回転という効果が含まれうることを示唆する数学的成果が述べられている．この成果が契機となり，燃焼の専門家による再現が実験により行われている．

2. 構成及び各章の要約

本博士論文は二部構成となっており，第一部（第一章，第二章）では，分岐余次元２の分岐構造の解析が為されており，第二部（第三章から第五章）では分岐余次元３の分岐構造の解析が論じられている．以下，各章における要約を述べる．

第一章では，二種の生物間における人口動態を記述する二成分 SKT 交差拡散競合系が解析されている．交差拡散競合系は，いわゆる人口圧力効果を有しているため，古典的な拡散競合系に比べ，遥かに豊富な解構造を有していることが知られている．本博士論文では，特に空間非一様な時間周期振動解の存在性について議論を行った．中心多様体理論と標準形理論を適用することで，二成分 SKT 交差拡散競合系は，あるパラメータ近傍において二次元力学系へと縮約される．そしてこの力学系を解析することで，定数定常解から分岐する空間非一様定常解の分岐枝上に，Hopf 分岐点をもつことが明らかとなった．すなわち，この Hopf 分岐点から局所漸近安定な時間周期振動解の存在を証明した．これは，互いに競合し合う二生物間の間に，時空間的共存が起こりうることを意味する．

床面近傍に設置された紙を一点から燃焼させると，床面方向への熱損失が無視できず，すす燃焼に近い燃焼現象が観測される．さらに熱による浮力流の効果が小さくなるため，二次元平面における燃え拡がり現象と見なせる．その燃焼領域は時間と共に拡がっていき，すす燃焼波面は平面閉曲線の時間発展として捉えられる．第二章では，上記の現象を再現する数理モデルとして導出された，ある界面方程式について考察する．この界面方程式は，Kuramoto-Sivashinsky 方程式に由来する法線方向速度を有する．本章での研究目的は，燃焼前線が不安定化するメカニズムと，時々刻々と変化する挙動の追跡である．結果，同心円状に拡がっていく円周解の半径がある大きさに成長したとき，空間非一様な回転波が一次分岐解として現れることが明らかとなる．このことは，燃焼現象が回転成分を有しうることを示唆している．特筆すべきは，界面方程式に対する分岐解析が実施された初めての例であり，今後の自由境界問題の研究に新たな方向性を与えるものと期待される．

第三章では，ある積分項をもつ空間一次元二成分反応拡散系における時間周期解やカオスに関して論じている．カオスとは，「解の振る舞いが決定論的システムに従うにも関わらず，僅かな誤差に鋭敏に依存するため，結果的に予測不可能な挙動を示す」というパラドキシカルの現象のことである．例えば，紙の自由落下における軌道や，天気予報の長期予測不可能性などが卑近な例である．決定論的システムに従うにも関わらず，些細な誤差により将来の予測が困難となるという事実は，我々の常識を覆すものであり，バタフライ効果とも呼ばれ，世界中で注目を浴び続けている．この現象は微分方程式にも姿を現す．最も有名な例は．ローレンツ方程式と呼ばれる常微分方程式系であり，これについては精度保証付き数値計算の援用により，解の挙動がカオスであることが数学的に示されている．一方，偏微分方程式におけるカオスに関する結果は数値的な報告に留まっており，解析的な結果は筆者の知る限り存在しない．工学や生物学に関する分野では，カオス的な挙動を示す数値実験結果が多数報告されており，そのシミュレーション予測精度の向上などの為にも，カオスに対する数学的構造解明は喫緊の課題の一つである．本章で扱う数理モデルの特徴は，適切に

パラメータを選択することで，自明解における線型化作用素が二重臨界点または三重臨界点をもつことが可能であることにある．Fourier 波数 0 と n が同時に臨界となる二重臨界点近傍においては，任意の n に対して局所漸近安定な空間非一様時間周期振動解が，空間非一様定常解における Hopf 分岐により得られることが分かる．一方，Fourier 波数 0 と 1 と 2 が同時に臨界となる三重臨界点近傍においては，中心多様体上における縮約方程式が Hopf-Pitchfork 不安定性を有する 0:2 複合モード平衡点をもつ．この不安定化における標準形の導出を行い，これを解析することで，非自明定常解と時間周期振動解とを繋ぎ合わせるヘテロクリニックサイクルが五次分岐で現れることが，適切な仮定の下で解析的に明らかになる．そして，ヘテロクリニックサイクルの周りにおいて馬蹄写像の構成を行うことで，カオスの本質的な発生原因が数学的に明らかにされる．常微分方程式系を考察した場合，ジェネリックには Hopf-fold 分岐が発生するはずであるが，偏微分方程式と境界条件，固有関数の幾何学的形状に由来する力学系の不変性によって，これまでジェネリックには現れないと思われていた Hopf-Pitchfork 分岐が現れるという大変興味深い事実が得られる．

第四章は，前章の拡張に対応しており，長方形領域における積分項つき二成分反応拡散系における時間周期振動解とカオスについて論じている．基本的な波数である(0,0):(1,-1):(1,-1):(2,0)モードが同時に臨界となるパラメータ近傍においては，正六角形パターンが解の主要項となる．解の幾何学的対称性により，中心多様体上における縮約方程式が四次元にも関わらず，分岐余次元は２へと縮退する．この影響により，カオスを局所分岐解析により追跡することはできず，結果として局所漸近安定な時間周期的振動正六角形解が得られる．一方で，この解の幾何学的対称性を破壊する Fourier 波数モード（例えば(0,0):(2,1) :(2,-1):(3,0) など)に着目すると，空間一次元問題と同様に，Hopf-Pitchfork 分岐に由来するヘテロクリニックサイクルを得ることができる．すなわち，空間次元に依らないカオスの発生原因とその数学的構造を抽出できる．前章と本章を統合することで，これまで未解決であった偏微分方程式のカオスの数理的構造を如何にして知りうるか，という根源的な問いに一つの回答を与える．

第五章では，人工的に反応項をコントロールするパラメータが追加された二成分反応拡散系を考察する．この数理モデルは，反応項に Turing 不安定性を課すことで，自明解において Turing-Turing-Hopf 不安定性を有することが分かる．すなわち，線型化作用素が二重 0 固有値とペアの純虚数固有値をもつようなパラメータの存在が分かる．このパラメータ近傍における中心多様体上の力学系の相空間は複素三次元で与えられるが,これをある不変領域へ制限すると,その中で第一章と同様の力学系が埋め込まれていることが分かる．また,別の不変領域上では第三章と同様の分岐構造,すなわち Hopf-Pitchfork 分岐に由来するヘテロクリニックサイクルを手に入れることができる．単純な二成分反応拡散系では，一般的には分岐余次元が 2 であるため，カオスを追跡することは困難である．しかし，本章で扱う数理モデルは，本質的に分岐余次元が 3 である．よって，これまで二成分反応拡散系において明らかにされていなかった解の時空間ダイナミクスを解明できる可能性を秘めている．分岐構造の全貌を明らかにすることは容易ではないため，標準形を導出する過程とともに，偏微分方程式と標準形に対する数値計算結果を紹介する．