

非線形偏微分方程式における時空間パターンと現象の解析へ向けたそれらの応用

メタデータ	言語: eng 出版者: 公開日: 2020-05-27 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 小林, 俊介 メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/10291/20869

「博士学位請求論文」審査報告書

審査委員 (主査) 理工学部 専任教授

氏名 矢崎 成俊 ㊞

(副査) 理工学部 専任教授

氏名 名和 範人 ㊞

(副査) 理工学部 専任教授

氏名 渡邊 浩 ㊞

1 論文提出者

小林 俊介

2 論文題名

Spatio-Temporal Patterns in the Nonlinear Partial Differential Equations

and Their Applications to Analysis of Phenomena

(非線形偏微分方程式における時空間パターンと現象の解析へ向けたそれらの応用)

3 論文の構成

当該論文は2部構成で全5章の章立てとなっている。第1部(第1, 2章)では、分岐余次元2の分岐構造の解析, 第2部(第3, 4, 5章)では、分岐余次元3の分岐構造の解析を中心に議論が展開されている。

第1部第1章では、数理生態学に現れる反応拡散方程式系が扱われ、数値計算ソフトで示唆されていたある時間周期解の存在性を数学的に示している。第2章では燃焼現象に現れる界面方程式が扱われ、方程式に内在する回転波の存在を示している。

第2部第3章では、非局所的な積分項を含む2成分1次元反応拡散系が扱われ、方程式系がカオス解を有することを示している。第4章は第3章の問題を2次元に拡張して解析したもので、時間周期的に振動する六角形解とカオスを有することを示している。第3章, 第4章を通して、偏微分方程式に対するカオスの数理的構造を知りうる手段を提示している。最終第5章では、第1章における周期解と第3章におけるカオス解が現れる系の性質を構成で

きるような、人工的な2成分1次元反応拡散系を考え、数値計算の示唆とともに解の時空間ダイナミクスを解明することができる道筋を立てている。

4 論文の概要

各章はほぼ独立しているため、各章ごとに概要を述べる。

第1章では、2種の生物間の個体群動態を記述する交差拡散競合系のあるモデルについて、その時間周期解の存在を証明した。交差拡散競合系は、いわゆる個体数圧力効果を含んでいるため、古典的な拡散競合系に比べて豊富な解構造を有していることが知られている。当該論文では空間非一様な時間周期振動解の存在性について議論を展開した。中心多様体理論と標準形理論を適用し、対象モデルは(二重に実部0固有値をもつ)あるパラメータ近傍において2次元力学系へと縮約される。そしてこの力学系を解析し、定数定常解から分岐する空間非一様な定常解の分岐枝上にホップ分岐点をもつこと、すなわちこのホップ分岐点から分岐する局所漸近安定な時間周期振動解が存在することを証明した。これは互いに競合し合う2種の生物間に、時間周期的に個体数が変化する時空間的共存が起こりうることを意味している。

第2章では、紙の燃焼現象の数理モデルとして知られるある界面方程式に回転波解が内在することを示した。床面付近に設置された紙を中心の一点から燃焼させると、床面方向への熱損失が無視できないため、燻焼に近い燃焼現象が観測される。さらに熱による浮力効果が小さくなるため、2次元平面における燃え拡がり現象と見なせる。その燃焼領域は時間と共に拡がり、燃焼前線は時間発展する平面閉曲線として捉えられる。このような現象を記述する数理モデルとして提案された界面方程式を用いて、燃焼前線が不安定化する機構を調べ、その結果、同心円状に拡がっていく円形解の半径がある大きさに成長したとき、空間非一様な回転波が1次分岐解として現れることが明らかとなった。すなわち、紙の燃焼/燻焼現象が回転成分を有しうることを示唆している。

第3章では、ある積分項をもつ2成分1次元反応拡散系における時間周期解やカオスに関して論じている。ここでカオスとは標語的に述べれば「解の振る舞いが決定論的システムに従うにも関わらず、僅かな誤差に鋭敏に依存するため予測不可能な挙動を示す」というパラドキシカルな現象のことである。例えば、紙の自由落下における紙の軌道や天気予報の長期予測不可能性などが卓近な例である。一般論として、ある常微分方程式系の解の挙動がカオスであることは数学的に示されているが、偏微分方程式におけるカオスに関する解析的結果はないと思われる。本章で扱う数理モデルにおけるパラメータを適切に選択し、非自明定常解と時間周期振動解とを繋ぎ合わせる軌道の存在性を示すことから、その周りで馬蹄写像の構成を行うことで、カオスの発生原因が数学的に明らかにされる。

第4章では、前章を拡張した問題を考察しており、長方形領域における積分項つき2成分2次元反応拡散系の時間周期振動解とカオスについて論じている。空間アスペクト比を $1:\sqrt{3}$ にとることで、正六角形パターンが解の主要項になり、局所漸近安定な振動正六角形解の存在が明らかとなる。一方で、正六角形という解の幾何学的対称性を破る空間アスペクト比に着目すると、空間1次元の問題と同様の分岐構造を見出すことができる。すなわち、馬蹄写像を近傍にもつヘテロクリニックサイクルの構成が可能であることが明らかになる。

第5章では、人工的に反応項をコントロールするパラメータが追加された2成分1次元反

応拡散系を考察する。この数理モデルの反応項にチューリング不安定性を課すことにより、自明解においてチューリング-チューリング-ホップ不安定性を持たせることができる。すなわち、線型化作用素が2重0固有値と純虚数固有値の組をもつようなパラメータの存在がいえる。相空間の領域に制限をかけると、その中に第1章や第3章で扱われた分岐構造が包摂されていることがわかる。したがって、これまで2成分反応拡散系において明らかにされていなかった解の時空間ダイナミクスを解明できる可能性を有するモデルといえる。解明の第一歩として、標準形を導出する過程とともに、偏微分方程式と標準形に対する数値計算結果を紹介する。

5 論文の特質

当該論文は、さまざまな現象を記述する数理モデルの解の構造の数学的、あるいは数値的な解析がなされた論文である。扱っている現象の種類はさまざまで、第1章は生物の個体数動態、第2章は燃焼現象、第3、4章は電気化学系由来の現象である。第5章のみ現象由来ではなく、逆に数学的興味からの人工的なモデルを提案している。このように、第5章の人工的なモデルも含めて、さまざまなヴァリエーションのモデル方程式に対して、力学系理論を応用して、解の定性的性質を明らかにするという姿勢が論文を貫く研究手法であり、当該論文の特質でもある。

各章ごとに、その特質を述べよう。

第1章では、数理生物に現れる交差拡散競合系のSKTモデルを数学的、数値的に解析している。分岐解析ソフト(AUTO)でのみ示唆されていた時間周期解の存在を数学的に示したことが本章の核心であり、数値的な傍証から数学的な厳密な証明に昇華させた点が特質である。

第2章では、紙の燃焼現象に現れる界面方程式を解析している。同心円状に広がる燃焼前線が、ある一定の大きさに達したとき、空間的に非一様な回転波が現れることを明らかにした。このように数学的な事実を明らかにすることによって、実験で観察されたことのない振る舞いを記述する解を導いている点が特質である。界面方程式に対する分岐解析がなされた恐らく初めての例で、今後の自由境界問題の研究に新たな方向性を与えるものであることは特筆すべき点である。

第3章と第4章では、電気化学現象に由来するモデル方程式の解析がなされている。第3章では1次元モデル、第4章では2次元モデルが扱われている。第4章では第3章で扱った1次元モデルの解には現れない解(六角形解)を捕まえて考察している点が特徴的である。これらの二つの章を通して、偏微分方程式に対するカオスとは何か、というカオスの定義も含めた大問題に対する一つの回答を与えている点が特質である。

最終第5章では、時間周期解やカオスのような解を含むモデル方程式を人工的に構成している。言い換えると、第1章や第3章で解析したような性質を構成できるような一般的な系を提示しており、いわば望みの解を有するモデル方程式のプロトタイプを提案しているという点が特質である。

6 論文の評価

当該論文は各章ごとに独立に読むことができるが、一方で全体を通して力学系の分岐解析

的手法を各種現象のモデル方程式や偏微分方程式系といった個別問題に対して柔軟に適用するという一貫した姿勢がみられる。別の言い方をすれば、多様な分野に対応できる普遍的な解析手法を提示した論文となっている。

また、いずれの章も新規性の高いものであり、余人をもっては代えがたい独自性のある結果となっている。このような評価は、第1, 3, 4章は論文提出者のすでに掲載された学術論文の結果を含む結果であり、残りの2章も、査読中あるいは投稿準備中の学術論文の結果を含むという事実によって、客観的に保証される。

加えて、当該論文を学術的価値という観点から述べるならば、次の四つに集約される。

- 1) モデル方程式の解の挙動を明らかにすることによって現象の理解を深めたこと。
- 2) 偏微分方程式に対するカオス現象の数学的構造の解明手法に一つの道筋を立てたこと。
- 3) 複雑な性質を有するにもかかわらずシンプルでわかりやすい数理モデルを構成したこと。
- 4) 特殊事例のみに終始する結論ではなく一般論として敷衍できる議論がなされたこと。

いずれの項目も、それ一つだけで十分な価値があるが、当該論文ではこれらの各項目が複合的に研究されており、論文全体を一つの作品としてみても、各章を個別に取り出しても、学術的価値は高いといえる。

以上より、当該論文は、普遍性、新規性、独自性、あるいは強く学術的価値を有するという観点から非常に高い評価をくだしてよい論文であると結論する。

7 論文の判定

本学位請求論文は、理工学研究科において必要な研究指導を受けたうえ提出されたものであり、本学学位規程の手続きに従い、審査委員全員による所定の審査及び最終試験に合格したので、博士（理学）の学位を授与するに値するものと判定する。

以 上