Almost Gorenstein 環

メタデータ	言語: eng
	出版者:
	公開日: 2017-05-31
	キーワード (Ja):
	キーワード (En):
	作成者: 谷口, 直樹
	メールアドレス:
	所属:
URL	http://hdl.handle.net/10291/18761

2015年度 理工学研究科
博士学位請求論文(要旨)

Almost Gorenstein rings
(Almost Gorenstein 環)

学位請求者 基礎理工学専攻数学系
谷口 直樹

内 容 の 要 旨

1 本研究の問題意識と目的

私の専門分野は可換環論であって, 主要な関心は環の内部構造解析にある。

可換環論とは，数や函数などの集合のように加減乗除という四則のうち加減乗を自由に行うことができる世界の構造を，主にこれら 3 つの演算を手掛かりに統一的に理解し，解析しようとする数学である。このような数学的構造は整数論や解析学では自明に付与されるが，数理科学の世界でいろいろな場面に共通に登場する「可換環」という構造を抽出し，現象のある部分を統一的に理解して得られる情報を提供することが，可換環論の使命である。可換環論は代数学の一分野であるが，可換環論の背後に幾何学が潜んでいることは注目に値する。実際，代数多様体の座標環は典型的な可換環である一方で，いかなる可換環もある代数多様体上の正則函数の集合とみなすことができる。このように，可換環論は代数学と幾何学の双方を支点として成立する新興の学問分野であるが，環構造論には環構造論に固有の美意識と問題意識があり，その美意識が可換環論を深化発展させる原動力となっている。

歴史を紐解けば，可換環論は 19 世紀末に不変式の研究を通して D. Hilbert によって創始され，E. Noether 女史により大きく展開された。20 世紀中頃，J.-P. Serre がホモロジー代数学を導入・駆使し，環の内部構造を外部表現に帰着させるという革命的手法を提示してから飛躍的な発展を遂げ，現在に至っている。20 世紀から 21 世紀にかけての 60 年間に，不変式論，代数的整数論，位相幾何学や代数幾何学，表現論，組合せ論などから問題と手法を獲得しつつ，環と加群の Cohen-Macaulay 性解析を中心に急速に発展・整備されてきた。現在ではこれらの分野における基本言語の 1 つとなっている。

現代可換環論の研究分野は多岐に渡るが，本論文の課題は高次元 almost Gorenstein 環論の整備と展開にある。1997 年，解析的不分岐な 1 次元局所環に対して，V. Barucci と R. Fröberg ([1]) によって導入された almost Gorenstein 環論の背後には，非常に多様かつ豊富に存在する非 Gorenstein Cohen-Macaulay 環の階層化と分類という，可換環論の大目標がある。Gorenstein 環は美しい対称性を持つ Cohen-Macaulay 環であるが，不変式論，代数幾何学，組み合わせ論など関連分野で出会う様々な Cohen-Macaulay 環は，Gorenstein でないことが少なくない。Gorenstein 環ではないが，Gorenstein 環に次いで優れた構造を持つ Cohen-Macaulay 環，即ち almost Gorenstein 環とは如何なる存在であるべきか，という視点からの環構造解析とそれに基づく新分野の開拓は，可換環論における喫緊の課題の 1 つである。可換環論のみならず，関連分野の発展にとっても Cohen-Macaulay 環の魅力的で発展性のある新しいクラスが提示され，解析されることの意義は非常に大きい。既に 2013 年に，明治大学の後藤四郎教授を中心に almost Gorenstein 環の枠組みが解析的不分岐とは限らない 1 次元 Cohen-Macaulay 環に対して定義され，豊かな理論が展開されている ([2])。

本論文の目的は，almost Gorenstein 環の理論の高次

元化とその展開にある。本論文では，一般次元の Cohen-Macaulay 局所環・次数環に対して，almost Gorenstein 性の定義を提示し，基盤となる理論を展開する。また，可換環論のみならず特異点論においても重要な研究対象である Rees 代数の環構造に着目し，その almost Gorenstein 性解析を行う。

2　本研究の構成ならびに各章の要約

第一章では，高次元 Cohen-Macaulay 環に対して，almost Gorenstein 性の定義を下記のよう提示し，基礎理論の整備を行う。

Definition 2.1 (Definition 1.1.1)**.** $(R, \mathfrak{m})$ は *Cohen-Macaulay* 局所環とし，R の正準加群 K_R の存在を仮定する。このとき，R が *almost Gorenstein* 局所環であるとは，次の R-加群としての短完全列

$$0 \to R \to \mathrm{K}_R \to C \to 0$$

であって，等式 $\mu_R(C) = \mathrm{e}^0_{\mathfrak{m}}(C)$ なるものが存在することである。但し，$\mu_R(C)$ は C の R-加群としての極小生成系の個数，$\mathrm{e}^0_{\mathfrak{m}}(C)$ は C の $\mathfrak{m}$ に関する重複度を表す。

Definition 2.1 から，Gorenstein 環は almost Gorenstein 環である。一方で，R の次元が 0 であれば，逆も成り立つ。もしも $C \neq (0)$ ならば，C は次元が $d-1$ の Cohen-Macaulay R-加群である。但し，$d = \dim R$ とする。さらに，剰余体 $R/\mathfrak{m}$ が無限ならば，等式 $\mu_R(C) = \mathrm{e}^0_{\mathfrak{m}}(C)$ は，$\mathfrak{m}C = (f_2, f_3, \dots, f_d)C$ となる $f_2, f_3, \dots, f_d \in \mathfrak{m}$ が存在することと同値である。 従って，B. Ulrich によると，C は maximally generated Cohen-Macaulay R-加群となる。そこで，本論文では，このような加群 C を Ulrich と呼ぶことにする。

Definition 2.2 (Definition 1.2.1)**.** $(R, \mathfrak{m})$ は *Noether* 局所環とし，$M \neq (0)$ は有限生成 R-加群とする。このとき，M が *Ulrich* R-加群であるとは，M は *Cohen-Macaulay* R-加群であって，$\mu_R(M) = \mathrm{e}^0_{\mathfrak{m}}(M)$ であることを言う。

特に，M の次元が 0 である場合には，M が Ulrich R-加群であることと，M が $R/\mathfrak{m}$ 上のベクトル空間であることは必要十分である。

即ち，almost Gorenstein 環 R は必ずしも Gorenstein 環ではないが，R はその正準加群 K_R に埋め込まれていて，差異 K_R/R が Ulrich 加群であるという制御可能な良い性質を持つものを言う。

Almost Gorenstein 環の例は豊富に存在する。例えば，数値半群環が almost Gorenstein であることの必要十分条件は対応する数値半群が almost symmetric であることである。本論文において，現在知られてる有限表現型 Cohen-Macaulay 局所環や 2 次元有理特異点が almost Gorenstien であることが示されている。

第一章の目的は，almost Gorenstein 環の基本的な性質を明らかにすることにある。また，多くの 1 次元の結果の高次元化を与えている。次の 2 つの定理は，それぞれ [2, Theorem 3.11, Theorem 6.5] の自然な拡張と捉えることができる。

Theorem 2.3 (Theorem 1.1.3)**.** $(R, \mathfrak{m})$ は *Cohen-Macaulay* 局所環，$d = \dim R \geq 1$ とし，剰余体 $R/\mathfrak{m}$ は無限とする。I $(\neq R)$ は R のイデアルで，R-加群としての同型 $I \cong \mathrm{K}_R$ を仮定する。このとき，次の 2 条件は同値である。

(1) R は *almost Gorenstein* 局所環である。
(2) R は巴系イデアル $Q = (f_1, f_2, \dots, f_d)$ であって，$f_1 \in I$ かつ $\mathfrak{m}(I+Q) = \mathfrak{m}Q$ なるものを含む。

Theorem 2.4 (Theorem 1.1.4)**.** $(R, \mathfrak{m})$ は *Cohen-Macaulay* 局所環，$d = \dim R \geq 1$，R の正準加群 K_R の存在を仮定し，剰余体 $R/\mathfrak{m}$ は無限とする。$\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ を $R/\mathfrak{p}$ が $d-1$ 次元の正則局所環をなすよう選ぶと，次の 2 条件は同値である。

(1) R は *almost Gorenstein* 局所環である。
(2) $R \ltimes \mathfrak{p}$ は *almost Gorenstein* 局所環である。

次数環に対しては，次のように almost Gorenstein 性を定義する。

Definition 2.5 (Definition 1.1.5)**.** $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ は *Cohen-Macaulay* 次数環とし，R_0 は局所環とする。R の次数付き正準加群 K_R の存在を仮定する。このとき，R が *almost Gorenstein* 次数環であるとは，次の次数 R-加群としての短完全列

$$0 \to R \to \mathrm{K}_R(-a) \to C \to 0$$

であって，等式 $\mu_R(C) = \mathrm{e}^0_{\mathfrak{M}}(C)$ なるものが存在することである。但し，$a = \mathrm{a}(R)$ は R の *a-invariant* を表し，$\mathfrak{M}$ は R の次数付き極大イデアルとする。

Gorenstein 次数環は almost Gorenstein 次数環である。また，R が almost Gorenstein 次数環ならば，$R_{\mathfrak{M}}$ は局所環として almost Gorenstein であるが，一般に逆は成立し

ない。反例は本論文の第一章（Example 1.8.8）で与えられるが，巴系イデアルの Rees 代数の間にも大量に見い出される（第二章，Theorems 2.2.7，2.2.8 参照)。

次の定理は，随伴次数環の almost Gorenstein 性が基礎環に遺伝することを主張するものである。ここで，$\mathrm{r}(R)$ は環 R の Cohen-Macaulay 型を表す。

Theorem 2.6 (Theorem 1.9.1). $(R, \mathfrak{m})$ は *Cohen-Macaulay* 局所環，R の正準加群 K_R の存在を仮定し，剰余体 $R/\mathfrak{m}$ は無限とする。$\mathfrak{m}$-準素イデアル I に対して，$\mathrm{gr}_I(R) = \bigoplus_{n \geq 0} I^n/I^{n+1}$ により I の随伴次数環を表す。このとき，$\mathrm{gr}_I(R)$ が *almost Gorenstein* 次数環であって，$\mathrm{r}(\mathrm{gr}_I(R)) = \mathrm{r}(R)$ ならば，R は局所環として *almost Gorenstein* である。

さらに，基礎環が斉次かつ level である場合には，次の特徴付けが得られる。

Theorem 2.7 (Theorem 1.1.6). $R = k[R_1]$ は無限体 k 上の斉次な *Cohen-Macaulay* 次数環，$d = \dim R \geq 1$ とし，R は *Gorenstein* でないと仮定する。このとき，次の 2 条件は同値である。

(1) R は *almost Gorenstein* 次数環であって，*level* である。
(2) R の全商環 $\mathrm{Q}(R)$ は *Gorenstein* 環であって，$\mathrm{a}(R) = 1 - d$ である。

Theorem 2.7 を適用することで，数多くの almost Gorenstein 次数環の例が具体的に構成できる。その他，第一章では，基礎環と tangent cone の almost Gorenstein 性についても解析している。

第二章と第三章では，与えられたイデアル I に対して，いつ Rees 代数 $\mathcal{R}(I) = R[It]$ が almost Gorenstein 次数環となるかについて解析している。Rees 代数の環構造解析は，1979 年の後藤四郎-下田保博 ([8]) まで遡る。現在までに，Rees 代数の Cohen-Macaulay 性は既に多くの研究者によって解析されており (例えば，[8, 9, 11, 12])，その中でも Gorensetein Rees 代数はかなり稀な存在であることが知られている ([10])。従って，Rees 代数の almost Gorenstein 性解析は，Rees 代数の環構造論としても新たな地平を開くと考えられる。

第二章においては，巴系の一部で生成されたイデアルと礎石イデアルの場合について解析し，それらの Rees 代数の almost Gorenstein 性の特徴付けを次のように与えている。

Theorem 2.8 (Theorem 2.1.3). $(R, \mathfrak{m})$ は *Gorenstein* 局所環，$d = \dim R \geq 3$ とし，$a_1, a_2, \ldots, a_r$ は R の部分巴系とする（$r \geq 3$)。このとき，$Q = (a_1, a_2, \ldots, a_r)$ とおくと，次の 2 条件は同値である。

(1) $\mathcal{R}(Q)$ は *almost Gorenstein* 次数環である。
(2) R は正則局所環であって，$a_1, a_2, \ldots, a_r$ は R の正則巴系の一部を成す。

Theorem 2.9 (Theorem 2.1.4). $(R, \mathfrak{m})$ は正則局所環，$d = \dim R \geq 3$ とし，剰余体 $R/\mathfrak{m}$ は無限とする。Q は R の巴系イデアルで，$Q \neq \mathfrak{m}$ とし，$I = Q : \mathfrak{m}$ とおく。このとき，次の 2 条件は同値である。

(1) $\mathcal{R}(I)$ は *almost Gorenstein* 次数環である。
(2) $I = \mathfrak{m}$ であるか，または $d = 3$ であって，かつ $I = (x) + \mathfrak{m}^2$ となる $x \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$ が存在する。

第三章では，2 次元正則局所環上の整閉イデアルに関する Rees 代数が次数環として almost Gorenstein であることを示す。

Theorem 2.10 (Theorem 3.1.3). $(R, \mathfrak{m})$ は 2 次元正則局所環とし，剰余体 $R/\mathfrak{m}$ は無限と仮定する。このとき，整閉な $\mathfrak{m}$-準素イデアル I に対して，*Rees* 代数 $\mathcal{R}(I)$ は *almost Gorenstein* 次数環である。

Theorem 2.10 の帰結として，$\ell > 0$ に対して，$\mathcal{R}(\mathfrak{m}^\ell)$ はすべて almost Gorenstein 次数環であることが従う。このように，本研究により，almost Gorenstein Rees 代数の豊富な具体例の構成が可能となり，Rees 代数の環構造論としても，今後の研究に新たな知見をもたらすことが期待される。

第四章の目的は，almost Gorenstien 環内の Ulrich ideal と呼ばれる特殊な $\mathfrak{m}$-準素イデアルの構造を解析することにある。まず，Ulrich ideal の定義を述べよう。

Definition 2.11 ([3]). $(R, \mathfrak{m})$ は *Cohen-Macaulay* 局所環，I は R の $\mathfrak{m}$-準素イデアルとし，巴系イデアル Q を節減として含むと仮定する。このとき，I が R の *Ulrich ideal* であるとは，$I \supsetneq Q$，$I^2 = QI$ であって，I/I^2 は自由 R/I-加群であることを言う。

第四章の主結果は，与えられた Ulrich ideal I に対して，複体 $\mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(R/I, R)$ の構造定理を与えるものであって，次のように述べることができる。

Theorem 2.12 (Theorem 4.1.1). $(R, \mathfrak{m})$ は *Cohen-Macaulay* 局所環，I は R の *Ulrich ideal* とし，巴系イ

デアルを節減として含むと仮定する。$t = \mu_R(I) - \dim R$ とおくと，R の導来圏での同型

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(R/I, R) \cong \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} (R/I)^{\oplus u_i}[-i]$$

が得られる。但し

$$u_i = \begin{cases} 0 & (i < \dim R) \\ t & (i = \dim R) \\ (t^2-1)t^{i-d-1} & (i > \dim R) \end{cases}$$

とする。特に，任意の整数 i に対して，R-加群としての同型

$$\mathrm{Ext}_R^i(R/I, R) \cong (R/I)^{\oplus u_i}$$

が従う。

Theorem 2.12 から，1 次元非 Gorenstein almost Gorenstein 局所環内の Ulrich ideal は極大イデアル $\mathfrak{m}$ に限ることが従う。また，非 Gorenstein almost Gorenstein 局所環で，Cohen-Macaulay 型が素数である場合や 2 次元有理特異点の場合には，Ulrich ideal の極小生成系の個数が一定であることなど数多くの応用が得られる。

参考文献

[1] V. Barucci and R. Fröberg, *One-dimensional almost Gorenstein rings*, J. Algebra, **188** (1997), no. 2, 418–442.

[2] S. Goto, N. Matsuoka and T. T. Phuong, *Almost Gorenstein rings*, J. Algebra, **379** (2013), 355-381.

[3] S. Goto, K. Ozeki, R. Takahashi, K.-i. Watanabe, and K.-i. Yoshida, *Ulrich ideals and modules*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **156** (2014), no.1, 137–166.

[4] S. Goto, N. Matsuoka, N. Taniguchi and K.-i. Yoshida, *The almost Gorenstein Rees algebras over two-dimensional regular local rings*, Preprint 2015.

[5] S. Goto, N. Matsuoka, N. Taniguchi and K.-i. Yoshida, *The almost Gorenstein Rees algebras of parameters*, Preprint 2015.

[6] S. Goto, R. Takahashi and N. Taniguchi, *Almost Gorenstein rings -towards a theory of higher dimension*, J. Pure Appl. Algebra, **219** (2015), 2666–2712.

[7] S. Goto, R. Takahashi and N. Taniguchi, *Ulrich ideals and almost Gorenstein rings*, Proc. Amer. Math. Soc., (2015) to appear.

[8] S. Goto and Y. Shimoda, *On the Rees algebras of Cohen-Macaulay local rings*, Commutative algebra (Fairfax, Va., 1979), 201–231, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **68**, Dekker, New York, 1982.

[9] C. Huneke and B. Ulrich, *Residual intersections*, J. reine angew. Math., **390** (1988), 1–20.

[10] S. Ikeda, *On the Gorensteinness of Rees algebras over local rings*, Nagoya Math. J., **102** (1986), 135–154.

[11] S. Morey and B. Ulrich, *Rees algebras of ideals with low codimension*, Proc. Amer. Math. Soc., **124** (1996), 3653–3661.

[12] A. Simis, B. Ulrich and W. V. Vasconcelos, *Rees algebras of modules*, Proc. London Math. Soc., **87** (3) (2003), 610–646.