

ベイジアンモデリングによる個人別消費者購買行動に関する研究

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2018-07-31 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 奥野, 拓也 メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/10291/19553

博士論文 2017年度（平成29年度）

ベイジアンモデリングによる
個人別消費者購買行動に関する研究

明治大学大学院 先端数理学研究科

奥野 拓也

2017年12月

目次

第1章	はじめに	1
1.1	研究背景と問題意識	1
1.2	研究の目的	2
1.3	本研究の構成	4
第2章	先行研究のレビュー	7
2.1	セールスプロモーションに関する先行研究	7
2.2	セールスプロモーションが購買行動に与える影響	7
2.3	購買タイミングに関する研究	9
2.4	CRMに関する研究	10
2.5	先行研究のまとめと本博士論文の貢献	11
第3章	個別別購買行動におけるプロモーションの効果	13
3.1	はじめに	13
3.2	離散選択モデル	15
3.2.1	ロジットモデルの尤度関数と推定法	16
3.2.2	ロジットモデルの問題点	17
3.3	ネステッドロジットモデル	18
3.3.1	ネステッドロジットモデルの尤度関数と推定法	20
3.4	本研究のモデル化	20
3.4.1	来店の効用モデル	20
3.4.2	来店効用の時変係数のモデル化	21
3.4.3	購買の効用モデル	21
3.4.4	購買効用の時変係数のモデル化	22
3.4.5	非線形非ガウス型状態空間モデルによる表現	23
3.4.6	状態ベクトルおよびパラメータ推定	25
3.5	データ概要	26
3.6	推定結果	31

3.6.1	静的ネステッドロジットモデル	36
3.6.2	階層ベイズネステッドロジットモデル	36
3.7	本章のまとめ	38
第 4 章	購買間隔の規則性	47
4.1	はじめに	47
4.2	ポアソン過程	48
4.3	モデル化	49
4.3.1	購買間隔のモデル化	49
4.3.2	推定方法	51
4.3.3	状態空間モデルによる表現	51
4.4	実データへの適用	52
4.4.1	データ概要	52
4.4.2	推定結果	55
4.4.3	一期先予測による評価	57
4.5	本章のまとめ	62
第 5 章	おわりに	65
5.1	本研究のまとめ	65
5.2	本研究の課題と今後の展望	66
謝辞		68
付 録 A		79
A.1	ガンベル分布	79
A.2	マルコフ連鎖モンテカルロ法	80
A.2.1	ギブス・サンプラー	80
A.2.2	ギブス・サンプラーのアルゴリズム	80
A.2.3	メトロポリス - ヘイスティング法	81
A.2.4	メトロポリス - ヘイスティング法のアルゴリズム	81
A.3	Particle Swarm Optimization	82

A.4 粒子フィルタ	83
付録B	87
B.1 EM アルゴリズム	87
B.2 カルマンフィルタ	87

目 次

1.1	マーケティングの展開	5
1.2	本論文の構成図	5
3.1	モデルの有向非循環グラフ. 丸は時間的に変動する項を表し, 四角は観測可能なデータを表す.	24
3.2	ソーセージ A の月別販売数 (上:北海道の店舗, 下:関東の店舗) グラフの色の薄い部分が FSP 価格による販売個数, 色の濃い部分が通常販売価格での販売個数である. FSP の利用状況は地域による差はほとんどない.	29
3.3	納豆 A の月別販売数 (上:北海道の店舗, 下:関東の店舗) グラフの色の薄い部分が FSP 価格による販売個数, 色の濃い部分が通常販売価格での販売個数である. ソーセージ A と同様に FSP の利用状況は地域による差はほとんどない.	30
3.4	ソーセージ A の月別平均販売価格 (上:北海道の店舗, 下:関東の店舗) 実線が FSP の平均販売価格, 破線が店頭販売価格と示す. FSP の利用状況と同じく平均販売価格は地域による差はほとんどない	32
3.5	納豆 A の月別平均販売価格 (上:北海道の店舗, 下:関東の店舗) 実線が FSP の平均販売価格, 破線が店頭販売価格と示す. 関東では期間の前半で価格差が大きくなっているが後半では北海道の店舗と差額は変わらない.	33
3.6	来店確率 [上] と購買確率 [下] の推定値 (丸が来店と購買の有無を示す)	34
3.7	来店確率の誤判別率の分布状況 [上:来店の誤判別数, 中:非来店の誤判別数, 下:全体の誤判別数]	35
3.8	購買確率の誤判別率の分布状況 [上:購買の誤判別数, 中:非購買の誤判別数, 下:全体の誤判別数]	40
3.9	来店効用のトレンド成分 (平滑化分布の推移) 上:上下の変動はあるものの検証期間中で下降傾向であるため, ロイヤリティが低下傾向にある. 中:上昇傾向にあるため店舗へのロイヤリティが上昇傾向にある. 下:期間中上下変動はあるものの, 大きな変動はない.	41
3.10	$\gamma_{n,i}^2$ (FSP の利用可能数) の個人毎の疑似オッズ比 ($\Delta x_{n,i}^4 \approx 10$) 上:初期が最大となり時間の経過とともに低下している. 中:強く反応している期間もあるが全体的に購買への影響は小さい. 下:緩やかに減衰している.	42

3.11	$\gamma_{n,i}^3$ (店舗販売価格と FSP 利用可能時の価格差)の個人毎の疑似オッズ比($\Delta x_{n,i}^5 \approx 10$) 上:初期が最大となり, 時間の経過とともに低下している. 中, 下:期間を通してほぼ一定値である.	43
3.12	納豆 A における $\gamma_{n,i}^3$ (店舗販売価格と FSP 利用可能時の価格差)の個人毎の疑似オッズ比($\Delta x_{n,i}^5 \approx 10$) 上:初期が最大となり時間の経過とともに低下しているが, 一定値の効果を保っている中:期間を通しておおきな変動もなくほとんど一定を推移している下:全体的に低下傾向にあるが, 一定値をキープしている	44
3.13	$\phi_{n,i}^2$ の平均時間変化($\Delta x_{n,i}^5 \approx 10$). 点線:ソーセージ A, 罫線:納豆 A. 両者とも時間の経過とともに, 購買に与える影響は小さくなるが, ソーセージ A が納豆 A より減衰が早い.	45
4.2	購買カテゴリの割合. トップス・シューズ・パンツ・アンダーウェアおよびジャケットの上位 5 カテゴリで全販売数の 80%程度を占めている.	53
4.3	推定結果. 線が推定値の平均値を表し, 点線が分散を表す. 上: 中盤で購買頻度が低下し購買発生率が大きく低下している. 後半に上昇するも全体的に減少傾向であるため購買頻度が低下している. 中:全体的に減少傾向であるため購買間隔が広がってきている. 下:推定に用いた入力データ. スパイクが立っている位置が購買発生日を表す.	54
4.5	全カテゴリ・全顧客の推定値 $\bar{\theta}^{(j)} = (\bar{\lambda}^{(j)}, \bar{\kappa}^{(j)})^T$ の散布図. 1つの点が1人の顧客に対応しており, 横軸:購買発生率, 縦軸:購買規則性を表す. 左側の線で囲んだ部分は $\bar{\kappa}^{(j)}$ が大きいことから定期購買顧客である. 定期購買されているカテゴリとしてアンダーウェアが多い. 点線で囲んだ顧客は直近購買と購買発生回数が多い顧客であり分析対象者における優良顧客と考えられる.	57
4.6	トップスにおける推定値 $\bar{\theta}^{(j)}$ の散布図. 1つの点が1人の顧客に対応しており, 横軸:購買発生率の平均値 $\bar{\lambda}^{(j)}$, 縦軸:購買規則性の平均値 $\bar{\kappa}^{(j)}$ を表す. 表 4.1 からわかるとおり購買回数が他カテゴリよりも圧倒的に多いため購買の発生率が高い顧客が多く存在する.	58
4.7	シューズにおける推定値 $\bar{\theta}^{(j)}$ の散布図. 1つの点が1人の顧客に対応しており, 横軸:購買発生率の平均値 $\bar{\lambda}^{(j)}$, 縦軸:購買規則性の平均値 $\bar{\kappa}^{(j)}$ を表す. トップスと比較して定期購買層が多いことが確認できる. シューズは季節毎に大きく変化するため定期的な購買が多いと考えられる.	58

4.8	パンツにおける推定値 $\bar{\theta}^{(j)}$ の散布図. 1つの点が1人の顧客に対応しており, 横軸: 購買発生率の平均値 $\bar{\lambda}^{(j)}$, 縦軸: 購買規則性の平均値 $\bar{\kappa}^{(j)}$ を表す. パンツは年間を通して利用できるアイテムであることから購買頻度が高く $\bar{\lambda}^{(j)}$ が大きいと考えられる.	59
4.9	アンダーウェアにおける推定値 $\bar{\theta}^{(j)}$ の散布図. 1つの点が1人の顧客に対応しており, 横軸: 購買発生率の平均値 $\bar{\lambda}^{(j)}$, 縦軸: 購買規則性の平均値 $\bar{\kappa}^{(j)}$ を表す. シューズと同様に定期的な購買顧客が多い. 他カテゴリに比べて同じ商品の利用回数が多いと想像されるため定期的な購買が発生していると考えられる.	59
4.10	ジャケット・アウターにおける推定値 $\bar{\theta}^{(j)}$ の散布図. 1つの点が1人の顧客に対応しており, 横軸: 購買発生率の平均値 $\bar{\lambda}^{(j)}$, 縦軸: 購買規則性の平均値 $\bar{\kappa}^{(j)}$ を表す. ジャケット・アウターは寒い時期に購買が多いと予想したが, 定期的な購買が発生している顧客の存在が確認できる. また全体から見れば販売数は少ないが高頻度で購入する顧客と定期的な購買が発生する顧客が入り交じったカテゴリであると図から読み取れる.	60
4.11	カテゴリ毎の購買規則性の推定値. 各カテゴリにおいて定期的に購買する顧客の存在が見て取れる.	60
4.12	評価方法の概要. $i+1$ 回目の購買日を i 回目までの購買データを利用して顧客毎に予測する. 本手法では i 回目の購買データを用いて, $\lambda_i^{(j)}, \kappa_i^{(j)}$ を推定し, 次回購買日 $t_{i+1}^{(j)}$ を予測する.	61
4.13	平均購買感覚による方法と本手法の正解率 (左: 平均購買間隔, 右: 本手法). 平均購買間隔による一期先予測は正解率 14.7%, 本手法の正解率 25.6%. 一期先予測に関して本手法が平均購買間隔による手法より 10 %以上向上している. またすべてのカテゴリにおいて本手法が平均購買間隔による手法を上回っていることが図より確認できる.	62
4.1	ガンマ分布とガンマ過程から発生させたイベントの発生例. 左: $\kappa = 0.1, 1.0, 3.0$ を変化させたときのガンマ分布. 右: ガンマ過程から発生させたイベント発生の概略図. κ が大きいと発生間隔が規則的になり, 小さくなるほど不規則的に発生する.	64
4.4	トップスカテゴリの月別販売個数. 7月と1月に販売個数のピークとなっている. (縦軸はサイトの特定に繋がる可能性があるため削除してある.)	64

A.1 PSO における Particle の移動 85

表目次

3.1	効用で用いる変数	23
3.2	全店舗のソーセージ販売数ベスト5に関する統計量	27
3.3	全店舗の納豆販売数ベスト5に関する統計量	27
3.4	対象顧客のソーセージカテゴリにおける購買回数比率	28
3.5	$\phi_{n,i}^2$ の統計量 (上段が平均値を表し, カッコ内が分散を表す)	38
4.1	カテゴリ毎の分析対象者数	53
4.2	ハイパーパラメータ γ のカテゴリごとの推定値の平均値と分散. いづれの値 も小さく安定した推定値が得られている.	54
4.3	本手法と平均購買間隔による一期先予測の正解率	62

第1章 はじめに

1.1 研究背景と問題意識

マーケティングの主題は時代に応じて変化し、現在ではノースウェスタン大学のコトラーが提唱する「マーケティング 4.0」時代へ突入したと言われている (Kotler, Kartajaya and Setiawan (2016)). 「マーケティング 1.0」は 1950 年代にアメリカで生まれた考え方で製品管理に重きをおいたマーケティング手法で、大量生産し消費者へどうやって販売するかが重視された 4P 分析 (「Product」, 「Price」, 「Promotion」, 「Place」) が普及した。そのため CM や広告による「マス・マーケティング」が主流であった。「マーケティング 2.0」は 1970 年以降に普及した消費者中心志向のマーケティング手法である。それまで大量生産してマスに向かって広告を打てば製品が飛ぶように売れる時代から消費者の買い控えが起こり、大量生産ではものが売れない時代へと変化した。その中で他社製品と差別化を図り消費者が必要とする物を生産するため、消費者ニーズが中心とした STP (「Segmentation」, 「Targeting」, 「Positioning」) マーケティングが生まれた。さらに 1993 年にマーケティングコンサルタントである Don Peppers, Martha Roger が The One to One Future の中で「One to One Marketing」を提唱し、消費者の購入履歴や購入頻度などの情報を蓄積し、それを分析・活用することで一人一の嗜好に合わせたマーケティングの重要性を訴えた (Peppers (1993)). 次に「マーケティング 3.0」ではこれまでと異なり市場がめざましく変化し、広告やコマーシャルといったマス向けのメディアから twitter, Facebook などの SNS が出現し個人の価値観が大きく変化し多様化した。そのような時代において製品から消費者へと移り変わり、製品・サービスの機能・性能より「どういったビジョンで作られたのか」といった製品・サービスの背景にあるストーリーや共感の追求が重要とされ「価値主導」の時代となった。そして「マーケティング 4.0」では「ニューウエーブの技術 (インターネット, SNS 等)」におけるデジタルマーケティングを活用したマーケティング手法が重要であると述べられている。

このように時代に応じてマーケティングはマスマーケティングから One to One マーケティングへと変化していき製品主体から消費者主体へと変化し、現在では消費者の多様性とニューウエーブ技術と呼ばれる新たな広告媒体の出現により個人毎に最適なマーケティングを実施することが重要である。そのためサービス提供側は顧客に対しポイントプログラムい

いわゆるフリークエント・ショッパーズ・プログラム（Frequent Shoppers Program; FSP）を提供することでID付きPOSデータが日々大量に蓄積される。サービス提供はこれらの蓄積したデータを活用することで顧客の満足度を向上し自社の売上を伸ばしている。その典型的な活用例としてあげられるのがAmazonに代表される協調フィルタリングを用いたレコメンドである。商品間の類似度を算出し近い商品を顧客へ提示することでより興味の近いものや多様な商品を提示することで顧客の購買意欲を向上させている。しかしFSPの導入によりID付きPOSデータが取得できることで顧客の店舗内における購買行動を追跡することが可能となったが、その活用には多くの課題が残されている。その課題の一つとして日々蓄積される大量のデータを用いて継続的な関係性を構築するために顧客関係管理（Customer Relationship Management; CRM）が導入されている。CRMの導入によりBlattberg and Deighton (1996)が指摘する顧客の生涯価値（customer life value）を計算する上で重要な離脱率や維持率を把握することが可能となる。これは既存顧客の維持に関するコストは、新規顧客獲得に要するコストの3分の1以下であるため、各サービス提供が力を入れているマーケティング戦略である。従ってID付きPOSデータの分析の高度化とその活用がメーカーにとって重要課題となっている。この課題解決のためには顧客の購買行動のメカニズムを明らかにすることが必要である。そこで本研究では購買行動のメカニズムを明らかにすべく統計モデルを用いて前述の課題解決に挑む。

1.2 研究の目的

本研究の目的は第1.1節にて示した問題意識に基づき店舗で取得可能なID付きPOSデータから顧客の購買行動を明らかにすることを目的とする。しかしID付きPOSデータは「誰が」、「いつ」、「何を購買した」が記されたデータであり、顧客の態度や行動を断片的に測定したものにはすぎない。そのため顧客の購買行動のメカニズム全てを解明するのは困難である。ニューウェーブ技術の登場により計測可能なデータが多くなってきたが、いくら計測技

術がマルチチャンネル・高度化しても得られる情報は断片的なものに過ぎず個人の購買行動のメカニズムを明らかにすることは難しい。そこで顧客の購買メカニズムを理解するために仮説を立て蓄積された ID 付き POS データから検証する。検証結果は顧客の購買行動における断片的な理解であるが、これをもとに高度なマーケティング戦略を立案し、売上向上・利益拡大といった KPI (Key Performance Indicator) を達成することが可能となる。

本研究では購買行動のメカニズムの理解にベイジアンモデリングを通じて ID 付き POS データを分析し、仮説を検証することで顧客の購買行動を理解する。マーケティング・サイエンスにおけるベイジアンモデリングの先駆けとして Rossi らによる消費者異質性を取り入れた階層ベイズモデルがあり、ここでは食品パネルデータを用い世帯収入、家族規模、退職者ダミー変数を属性情報としてデータを分析した。その結果、退職者がいる世帯は新聞広告の感度が高く、店頭でのディスプレイへの感度が低い。また低所得者層は価格の安いプライベートブランドへの効用が高くなると述べ、ベイジアンモデリングが現実の消費者像に近い推定結果であることを示した。Rossi and Allenby (1993) によるベイジアンモデリングの有効性が示されて以来、マーケティング・サイエンスにおける消費者購買行動分析ではベイジアンモデリングが主流となっている。

本研究でも先に述べたとおりベイジアンモデリングを利用してデータを分析し、顧客の購買行動を理解する。ただし真の購買行動のメカニズムを明らかにすることは困難であるため、2つのテーマに絞って検証する。第1のテーマは One to One マーケティングにおけるセールスプロモーションの効果推定である。セールスプロモーションはマーケティングにおける主要なテーマの一つであり、購買へ直接的に働きかける販売促進手法である。そのため短期的な効果が出やすく実務において多用されている。セールスプロモーションに関する研究は数多く存在し顧客の選択行動をモデル化し、そこで得られた推定結果を利用してセールスプロモーションの効果を捉えるアプローチが多い。本研究でも同様に顧客の選択行動をモデル化し、得られた推定結果を利用してセールスプロモーションの効果を議論する。ただし本研究ではセールスプロモーションが購買へ与える影響の時間変動を推定することが目的である。これは同様のセールスプロモーションを続け、顧客が店舗から離脱しないようなマーケティング戦略の立案を援助するためである。

第2のテーマは顧客の購買頻度に関する研究である。企業において顧客の離脱は大きな問題である。顧客が離脱するということは店舗を訪れなくなることであり、売上に寄与する人数が減ってしまうことである。そのため売上向上、利益増大等の KPI を掲げ成長する企業にとって離脱顧客は大きな損害である。顧客の流出を防止するために CRM が導入され、日々顧客の離脱を管理している。しかしながら顧客の離脱を表す指標は企業によって異なる上に、離脱を表す定義は感覚的に設定されたものが多数である。そのため顧客が離脱したこ

とは発見できても離脱に向かっている顧客を発見することは難しい。そこで本研究では顧客の購買間隔を推定し集中購買や定期購買などの購買パターンを推定する。購買パターンの変化は顧客とサイトにおける関係性の変化であり顧客へのマーケティングを再考する契機となりえる。

これら2つの研究テーマを通じてマーケティング戦略を高度化するためのマーケティング施策を導く。いずれのテーマも顧客の購買行動の一面を明らかにすることを目的とし、その積み重ねから顧客の購買行動のメカニズムを明らかにすることを目的としている。そのためどちらのテーマも同じ購買行動ではあるが2つのアプローチから顧客を理解する。

1.3 本研究の構成

本研究の構成は以下の通りである。

第2章では、本研究に関する先行研究を整理、検討し本研究で掲げているテーマに関して現時点で明らかになっている状況を示し、本研究の位置づけを明示する。

第3章では第1の研究テーマである「個人別購買行動におけるプロモーションの効果」について示す。具体的には消費者の来店・購買行動を選択モデルにてモデル化し、商品の購買時に与えるプロモーション（ディスカウント）効果の時間変化を推定する。推定対象とする商品は高価格帯の商品と低価格帯の商品を取り上げ、それらのプロモーション効果の時間変化を示し顧客維持のためのマーケティング施策を考察する。

第4章には第2の研究テーマである「購買間隔の規則性」に関する研究結果を示す。具体的には購買間隔の変動に着目し、購買間隔に生成分布を仮定したモデルを構築することで定期的な購買やマイブームなどの局所的な連続購買のタイミングを明らかにする。またモデルの推定結果を用いることで購買頻度の視点で顧客を維持するためにマーケターが顧客へアプローチするタイミングを考察する。

第5章には本研究のまとめを示す。第3章、第4章の研究テーマから得られた成果を総括し、その学術的貢献と実務への示唆を示すとともに、残された課題について言及する。

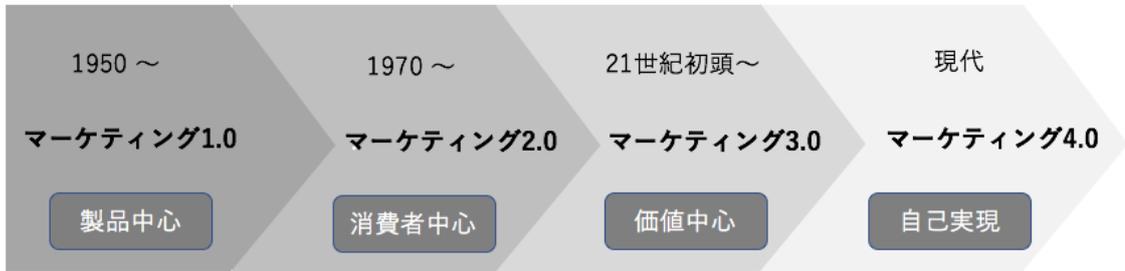


図 1.1: マーケティングの展開

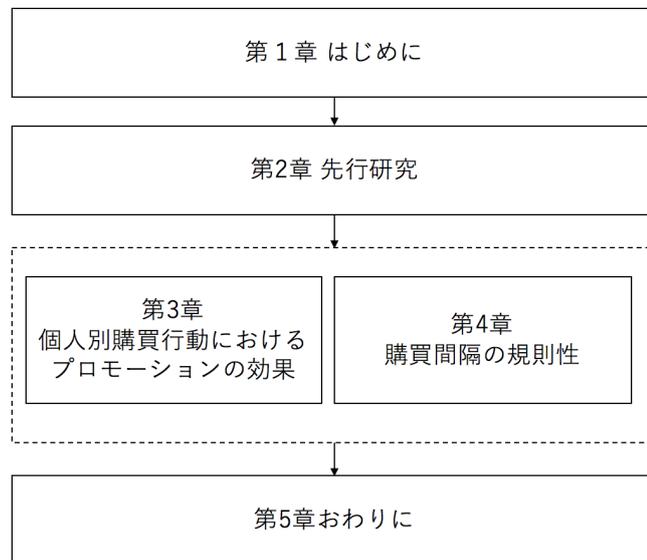


図 1.2: 本論文の構成図

第2章 先行研究のレビュー

本章では、第3章、第4章で提案する統計モデルで使用する手法を中心に、顧客の異質性と購買行動のダイナミクスに関する手法と、その手法を用いた先行研究を説明する。

2.1 セールスプロモーションに関する先行研究

セールスプロモーションの定義は1998年にアメリカ・マーケティング協会が発表した「セールス・プロモーションとは、トライアル購買の刺激、消費者需要の増加、製品の入手可能性の増大などのために、事前に決定された限られた機関において、消費者、小売業者あるいは卸売業者に対して実行される、媒体および非媒体によるマーケティング・プレッシャーである。」とされている。また Blattberg and Neslin (1990) は、セールスプロモーションを「顧客の行動に直接影響を与えることを目的とするアクション重視のマーケティング・イベント」と定義している。このようにセールスプロモーションはプロモーションは顧客の行動に焦点を当て、顧客の行動を直接的に影響を与えることを意図したマーケティング活動である。そのことを踏まえ本節では、セールスプロモーションが顧客の購買行動に影響を与える先行研究について概観する。

2.2 セールスプロモーションが購買行動に与える影響

セールスプロモーションが購買へ与える影響を推定する問題はこれまで多くの先行研究が存在する。とりわけ非集計データを対象とした研究については、顧客の選択行動に着目し離散選択モデルの推定値を用いて、プロモーションの効果や価格の感度の変化を捉えるというアプローチが多い (Guadagni and Little (1983), Chintagunta, Jain and Vilcassim (1991), Mazumdar and Papatla (2000), Bell and Lattin (2000), Rossi and Allenby (1993), Mela, Gupta and Lehmann (1997), 日高・佐藤 (2016))。離散選択モデルとは個人が選択集合の中から代替案を選択する事象について定式化したもので、心理学における Thurstone (1927) を発端とし、経済学において McFadden et al. (1973) により一般化されたものである。通常

は選択集合の中から効用が最大となる選択肢を選ぶことが仮定されているが、広義には選択集合内の先行順序、複数個選択などの場合も離散選択モデルによる分析の対象となる。

個人別の離散選択モデルをマーケティング・サイエンスへ応用したのは Guadagni and Little (1983) のスキャナー・パネルデータが始まりである。それ以降、様々な改良とバリエーションが提案されている (Manchanda, Ansari and Gupta (1999); Seetharaman, Ainslie and Chintagunta (1999); Erdem (1998); Bell, Chiang and Padmanabhan (1999))。離散選択モデルでは効用が説明変数の線形結合で表され、説明変数には「ロイヤリティ」、「価格」、「プロモーションの有無」、「陳列の有無」などを用いてモデル化する。Guadagni and Little (1983) は「製品の販売価格」、「値引きの有無」、「特別陳列の有無」などを説明変数とし、それぞれの変数のブランド選択に対する影響を明らかにした。Neslin, Henderson and Quelch (1985) は家庭内在庫を導入しプロモーション効果は購買間隔と購買量に影響していると仮定しモデル化した。スキャンパネルデータを用いた実証分析の結果、プロモーションは購買量を増加させ購買間隔を短縮させることを示した。Alvarez Alvarez and Vázquez Casielles (2005) は、ブランド選択に関するマーケティング変数 (価格、参照価格、損失と利益、ロイヤリティ、プロモーション) を分析した。彼らは特に販売促進がこのプロセスに及ぼす影響には着目した結果、購買決定を行う前に消費者がプロモーションの有無、価格情報を考慮に入れることを示唆している。Gedenk and Neslin (2000) は、以前の購入のプロモーション状況が、ブランドの選択に影響を与える可能性があることを明らかにした。Hui, Huang, Suher and Inman (2013) は個人特性、カテゴリ特性、カテゴリのプロモーション、カテゴリ間の相補性をマーケティング変数とした非計画考慮をモデル化し非計画考慮に対するセールスプロモーション効果は有効であると述べている。また Papatla and Krishnamurthi (1996) は、過去の購買経験が将来のプロモーション効果に及ぼす影響について実証分析を行い、プロモーションはロイヤリティに対して負の効果があることやクーポンによる購買は価格感度を上昇させることを明らかにした。しかしながら、当該アプローチを採用した場合、個人の異質性を取り込んでいないものの時間変動を取り込んでいないため時間的変動については議論されていない。

このようなプロモーション効果の時間的な変動を捉えるために、状態空間モデルを適用した研究が報告されている (Lachaab, Ansari, Jedidi and Trabelsi (2006), Bass, Bruce, Majumdar and Murthi (2007), 本橋・樋口 (2013), 青柳・佐藤 (2015))。集計データに適用した例として Bass, Bruce, Majumdar and Murthi (2007) は複数の広告を同時に配信した際のそれぞれの影響について検証し、異なる広告を同時に配信することが互いの広告効果を通減することを示した。しかしながらセールスプロモーションの動的効果を推定するにあたり状態空間モデルではデータが生じるメカニズムを示す観測モデルと、観測モデルの背後

にあるシステムの動的変化を表現するシステムモデルを構築する。推定した結果からセールスプロモーションの効果を議論するが、動的な変化の発生については明示的には説明することができない。そのため青柳・佐藤 (2015) は観測モデルとシステムモデルの間に時変係数の時間発展を回帰モデルで説明する構造モデルを導入した。その結果、セールスプロモーションの動的効果は、広告ストックや店舗レベル参照価格に動的に影響されて生じること、また広告ストックや参照価格が間接的にセールスプロモーションを通じて、売上に影響を与えると述べている。

個人レベルのデータに対して状態空間モデルを適用した研究として佐藤・樋口 (2008, 2007) がある。佐藤・樋口 (2008, 2007) では個人別の離散選択モデルに状態空間モデルを応用し、来店と購買の生起行動をモデル化した。当該研究では来店効用にトレンド項や週周期成分などの時系列成分及びチラシの掲載商品の平均値引率やチラシの掲載商品数などの成分が来店に作用していると仮定し、モデル化している。実証分析の結果、チラシが来店に与える影響の時間変化を捉えるで、顧客ごとに反応が高かったチラシの特定が行えると述べている。佐藤・樋口 (2008, 2007) の研究ではセールスプロモーションが来店に与える影響を推定している。同様のフレームワークを用いてセールスプロモーションが購買へ与える影響をモデル化して推定可能であるがまだ提案されていない。

2.3 購買タイミングに関する研究

マーケターは顧客の購買発生や購買間隔などがマーケティング活動によってどのように変化するのか、顧客の属性によってその違いはどう異なるかについて関心があり、それに答えるためのモデルが提案されている。購買タイミングに関する研究の中でも購買発生に関する研究はポアソンモデルが代表的である。購買発生のポアソンモデルも離散選択モデルと同様に説明変数の線形結合をモデルに取り込む。説明変数には「価格」、「プロモーションの有無や強さ」、「世帯のデモグラフィックス」などを用いる (阿部・近藤 (2005))。ただしポアソン過程を用いたモデル化は購買間隔が指数分布に従うため、購買がランダムに発生することになる。そのため単一カテゴリーや周期的な現象をモデル化することが困難であると指摘されている。そのため購買間隔に指数分布以外の分布を用いるアプローチもある。購買間隔の分布を選択する際に生存時間解析のハザード率を用いた研究が数多く、購買間隔を生存時間として求めることが多い Gupta (1991), Vilcassim and Jain (1991), Helsen and Schmittlein (1993), Gönül and Srinivasan (1993), Seetharaman and Chintagunta (2003), Seetharaman (2004))。Jain and Vilcassim (1991) は指数分布や Erlang-2 分布等の分布を仮定した比例ハザードモデルを比較し、顧客の異質性を導入することでモデルの精度を改善

することが可能であると示している。小西 (2006) は顧客が利用するサービス (カット・カラー・パーマ) の来店意欲を Cox 比例ハザードモデルで推定し、次期来店日の予測を行っている。その結果、カラーとパーマは来店予測に個人の属性が必要ないと示唆し、ダイレクトメール (DM) を送付する際は、ヘアカラーの割引が売り上げ増加に効果的であると述べている。

購買間隔のモデル化にポアソン分布以外の分布を用いた方法も先行研究が多く存在する (Gupta (1988), Allenby, Leone and Jen (1999), Bawa (1990), Moe and Fader (2004), Bucklin and Sismeiro (2003))。山口 (2014) はウェブサイト訪問間隔に指数分布を仮定し、訪問間隔に影響を与える四つの要因 (前回 PV 数, 前回購入数, 前回訪問間隔, トレンド) を発見し、将来 "Valuable" になる可能性のあるビジターを抽出することが可能になったと述べている。また負の二項分布 (negative binomial distribution, NBD) を用いた NBD モデルがありデータへの当てはまりがよいことが知られている (阿部・近藤 (2005))。阿部 (2011) は Pareto/NBD モデルを階層ベイズモデルによるアプローチで HB モデルを提案した。HB モデルは購買がポアソン過程に従うとし、生存時間は指数分布に従うとし、顧客の異質性を対数正規分布にてモデル化した。その結果、購買頻度が高い顧客やサイトから離脱しにくい顧客の特徴を抽出するなど顧客関係管理 (Customer Relationship Management, CRM) における RFM (Recency, Frequency, Monetary) 分析と顧客生涯価値 (Customer Lifetime Value, CLV) を結びつけたことで有用な知見を得た。

2.4 CRM に関する研究

CRM とは顧客との要項な関係性を継続的に構築し、企業が利益を獲得し続けられうような顧客管理である。マーケティング・サイエンスにおいて CRM は学術研究における重要な分野の一つである (Winer and Neslin (2014))。そのため CRM において RFM 分析が広く使われていることは、リセセンサー、フリクエンシー、マネタリーが顧客の購買行動を表す指標であることを示している。しかし RFM 分析はアドホックで一律なルールで決められた簡素な指標であるため学術的には高度化に関する研究が行われている (Schmittlein, Morrison and Colombo (1987), Schmittlein and Peterson (1994), Fader, Hardie and Lee (2005), Abe (2009))。先に述べたように Abe (2009) は RFM と CLV を関連付け企業にとって有益な情報を抽出した。また RFM 分析と同様に顧客の購買行動を簡潔に表すための指標に関する研究も行われている。Zhang, Bradlow and Small (2013, 2014) はクランピネスと呼ばれる新たな指標を提案した。クランピネスは購買間隔に着目した指標で、「イベント (来店・購買) が均等な間隔に従わない度合い」と定義されている。ある観測区間 T における

購買回数が N 発生したとき等間隔で購買が発生する顧客、特定期間に購買が集中する顧客、購買間隔が長くなる顧客など購買パターンは様々である。これら購買パターンはRFM分析では捉えることが困難であるため提案された指標である。彼らが実証分析の結果、Webのアクセス（来店）/購買間隔にはクランピネスが存在する顧客が4割以上存在しており、連続的なアクセス（来店）/購買が発生しやすいことが示された。また Zhang, Bradlow and Small (2013, 2014) はRFM分析と同様に簡素に記述できるようにモデル化しなかった。そのため実務において利用しやすいが高度な分析が困難であると指摘されたが、Platzer and Reutterer (2016) によって確率モデルとして定式化された。彼らのモデルの更なる拡張は重要な研究課題である。

2.5 先行研究のまとめと本博士論文の貢献

企業側はKPI (key performance indicator) を達成するためにマーケティング施策を実施する。そのためプロモーション戦略や顧客の関係維持が実務上極めて重要である。プロモーションに関する研究は購買行動へダイレクトに影響するため、購買の離散選択モデルを用いた研究が多くプロモーションの効果を推定する重要性が示されていた。また顧客の関係維持において顧客満足度の向上は重要であるが、競合店舗のデータが取得できないため検証が困難である。そのため自店舗における顧客の購買行動を把握することが重要とされ様々な分析モデルが提案されている。

本博士研究も同様に分析モデルを構築し顧客の購買行動のメカニズムを明らかにすることで継続的な関係維持を目的とする。具体的には第3章では、佐藤ら佐藤・樋口 (2008, 2007) の提案する離散選択モデルを用いて顧客別の特定商品のプロモーション効果を推定する。通常、顧客の選択問題を考えるときブランドやカテゴリレベルのデータを利用して説明変数の係数を推定する。本博士研究では特定商品の購買データを利用してOne to Oneマーケティングのプロモーション効果を推定し、その有用性を示した。本研究では既存手法のモデル化をベースとし効用を修正し商品レベルのデータへ適用したことで、分析モデルの適用可能範囲を広げることができた。

第4章ではRFMCのクランピネスに着目し、その時間変動を推定した。Zhang, Bradlow and Small (2013, 2014) が提案したクランピネスはRFM分析同様に簡易な指標であるが有用性が示され、Platzerら Platzer and Reutterer (2016) によってNBDモデルの拡張として自然な形でクランピネスを統計モデルを用いて高度化された。本研究ではPlatzerら Platzer and Reutterer (2016) と同様にクランピネスに着目するがその時間変動を推定する点が学術面への貢献である。またモデル化には点過程理論を用いて状態空間モデルの枠組みで推定し

ており他分野の方法を応用した。本研究は今後、他分野の手法が利用できることを示し応用可能性も広げることができた。

第3章 個別別購買行動におけるプロモーションの効果

3.1 はじめに

スーパーマーケットやコンビニエンスストア等において会計時のポイントカードの提示が普及し個人毎の購買データが簡単に蓄積されるようになった。それに伴い企業は、販売個数、販売金額の向上を目的として、様々なマーケティング施策を実施している。マーケティング施策の代表的なものにリピート購買商品のディスカウントや会員限定価格などの価格訴求型のセールスプロモーション（以下、セールスプロモーション）があげられる。セールスプロモーションは購買に直接的に働きかけるため購買行動を誘発する販売促進手法である。そのため、短期的な効果が出やすくマーケティングの実務において多用されるプロモーションである。しかし、企業においてセールスプロモーションの費用対効果や顧客毎の購買に与える影響については明確な測定指標が存在しておらず、その把握は困難である。

セールスプロモーションが与える効果は短期的な効果と長期的な効果の2種類に分けられる。短期的な効果として、セールスプロモーションを実施する前後では売上が10倍以上になることは珍しくなく大幅な売上増が期待される。そのため実務においてセールスプロモーションが多用されている。短期的な売上増の源泉はブランドスイッチ・購買量の増加・購買間隔の短縮があげられ、これらの効果測定に関する先行研究は数多く存在する (Gupta (1988), Guadagni and Little (1983), Krishnamurthi and Raj (1988))。またセールスプロモーションの長期的な効果としてブランドをリピート購買する確率を上げ、継続的に同一ブランドを購入する習慣を形成するといった効果の存在が先行研究で報告されている (Blattberg, Briesch and Fox (1995))。

セールスプロモーションは売上増などの短期的に好ましい効果を上げる反面、継続的なプロモーションの長期的な効果として顧客の購買行動にはマイナスな影響をもたらすことも指摘されている。セールスプロモーションが実施されていなければ購入しなくなる・ブランドイメージの低下・参照価格（顧客が商品の価格を評価するのに用いる内的な基準価格）の低下が挙げられる。これら長期的なマイナス効果を抑制するためにセールスプロモーションの効果の時間変動を捉えることは重要である。

本研究の目的は、セールスプロモーション効果の時間変動を評価可能にするモデルの構築およびその有効性を実データを用いて検証することである。本稿で提示するモデル化は、マーケティング研究では市場反応モデルと呼ばれ、市場反応が動的であるという仮定から動的市場反応モデルと呼ばれるものである。

動的市場反応モデルでは状態空間モデルを適用した研究が報告されている (Kondo and Kitagawa (2000), 山口・土屋・樋口 (2004), Bruce (2008), Bass, Bruce, Majumdar and Murthi (2007), 青柳・佐藤 (2015))。動的市場反応モデルのプロモーション効果の分析において, Bass, Bruce, Majumdar and Murthi (2007) は複数の広告を同時に配信した際のそれぞれの影響について検証し, 異なる広告を同時に配信することが互いの広告効果を逓減することを示した。本橋・樋口 (2013) はセールスプロモーションによって価格に敏感な顧客とそうでない顧客の割合が変化すると仮定し, 顧客の購買数に着目したブランド選択モデルを構築した。その結果, プロモーションの前後で感度が異なる消費者の混合割合が変動していることを示した。ただし, これらのモデルは集計レベルのデータに適用したものである。動的市場反応モデルを個人レベルに適用した研究として佐藤・樋口 (2007, 2008) がある。これらは来店生起行動とカテゴリ購買生起行動に状態空間モデルを適用し, 個人毎の時変回帰係数を推定した。その結果, 来店生起行動および牛乳カテゴリ購買生起行動を高い精度で判別可能であることを示した。また推定した時変回帰係数から個人毎の市場反応の変化を把握するフレームワークを提案した。

本研究ではセールスプロモーションは購買生起行動に影響すると仮定し, 佐藤・樋口 (2007, 2008) が提案したフレームワークを用いて, 個人レベルの単品 (SKU) の購買生起における動的市場反応モデルを構築する。構築したモデルを用いて, あるスーパーマーケットの1年分のID付きPOSデータを用いて有効性を検証する。本稿で扱うセールスプロモーションは, 個人の過去の購買履歴に基づいて発行されるもので, いわゆるパーソナルレコメンデーションシステムによって, 個人毎にカスタマイズされたクーポンが月初に発行されるフリークエント・ショッパーズ・プログラム (Frequent Shoppers Program: FSP) である。利用者はレジで会員カードを提示することで発行されたクーポンが自動的に利用される仕組みであるため, セールスプロモーションの効果分析は, 個人毎・時点別に推定する必要がある。

モデルの構築にあたって, 先行研究との違いはセールスプロモーションが与える影響は購買行動へ直接的に寄与すると仮定している点である。佐藤・樋口 (2007, 2008) ではマスマーケティングのセールスプロモーションの一種であるチラシの効果は来店行動へ与えると仮定しモデル化した。その結果, 個人毎にチラシの影響が高い時期が把握可能となるため, 効果の高かったチラシの掲載内容を検証することで個人に有効な内容を抽出することが可能となる。しかしチラシの影響が来店行動へ寄与すると仮定されているため, 購買行動へ影響を与

えているか不明である。またチラシ効果の推定はカテゴリレベルで行われているため、同一カテゴリの商品が複数掲載されているケースではどの商品が効果的であったかまでは把握が困難である。そのため、本研究ではセールスプロモーションが購買行動へ寄与すると仮定のもとでモデル化し、プロモーションの影響度の推定は商品レベルで行った。その結果、個人毎・商品別に発行したプロモーションの購買行動へ与える影響度が推定可能となる。

以降の節では本研究で利用する離散選択モデルについて説明し、本研究の提案モデルについて示す。

3.2 離散選択モデル

消費者が与えられた選択肢の中から効用が最大になる選択肢を選ぶことを仮定し、それぞれの選択肢の効用を確率変数として表すモデルのことを確率的効用モデルと呼ばれる。この仮定の下で、個人 i が時刻 t における集合 C から選択肢 j が選択される確率は下式で表される。

$$p(j|C) = \Pr(U_{j,t,i} > U_{k,t,i}), j, k \in C, j \neq k \quad (3.1)$$

$$U_{j,t,i} = V_{j,t,i} + \epsilon_{j,t,i} \quad (3.2)$$

ここで $U_{j,t,i}$ は顧客 i が時刻 t における集合 C から選択肢 j の効用、 $V_{j,t,i}$ は効用の確定項および $\epsilon_{j,t,i}$ は効用の確率的変動項をそれぞれ表す。通常、効用の確定項である $V_{j,t,i}$ はマーケティング変数とその影響度を表すパラメータの線形結合によって式 (3.3) のように表現する。

$$V_{j,t,i} = \beta_0 x_{j,t,i}^{(0)} + \beta_1 x_{j,t,i}^{(1)} + \dots + \beta_l x_{j,t,i}^{(l)} \quad (3.3)$$

$$= \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{x}_{j,t,i} \quad (3.4)$$

ここで \boldsymbol{x} はマーケティング変数などの説明変数を示し、 $\boldsymbol{\beta}$ はその影響度を表すパラメータである。

次に効用の確率項 $\epsilon_{j,t,i}$ の確率分布を考える。さまざまな要因が重なり合った効用の確率項は中心極限定理により正規分布を仮定することが最も妥当性が高い。しかし正規分布を仮定するのは最も自然であるが、この場合 $P(j|C)$ を積分を含んだ形で表現するしかなく、パラメータ推定が困難となる。そのため効用の確率項 $\epsilon_{j,t,i}$ にガンベル分布を仮定する。ガンベル分布を採用したモデルをロジットモデルと呼ばれ計算の簡便さから最も利用されるモデルである。

各選択肢の効用の確率項がそれぞれパラメータ $(\eta, \omega) = (0, 1)$ を持つ互いに独立なガンベル分布に従うとする。 J 個ある選択肢の集合 C から選択肢 $j = 1$ が選択される確率は式

(3.1), 式 (3.2) から,

$$p_{t,i}(1|C) = \Pr(V_{1,t,i} + \epsilon_{1,t,i} > \max_{j=2,\dots,J} (V_{j,t,i} + \epsilon_{j,t,i})) \quad (3.5)$$

で表される. ここで $U_{t,i}^* = \max_j (V_{j,t,i} + \epsilon_{j,t,i}), \forall j \in C, j \neq 1$ と定義すると, U^* はパラメータ

$$\left(\ln \sum_j \exp(V_{j,t,i}), 1 \right)$$

をもつガンベル分布に従う. つまり $U^* = V^* + \epsilon^*$ から

$$V_{t,i}^* = \ln \sum_{j=2}^J \exp(V_{j,t,i})$$

であり, ϵ^* はパラメータ $(0, 1)$ を持つガンベル分布に従う. これにより, ガンベル分布の性質から (3.5) 式は以下のように変形される.

$$\begin{aligned} p(1|C) &= \Pr(V_{1,t,i} + \epsilon_{1,t,i} > V_{j,t,i}^* + \epsilon_{j,t,i}^*), j \in C, j \neq 1 \\ &= \Pr(\epsilon_{j,t,i}^* - \epsilon_{1,t,i} < V_{1,t,i} - V_{j,t,i}^*) \\ &= \frac{1}{1 + \exp(V_{j,t,i}^* - V_{1,t,i})} \\ &= \frac{\exp(V_{1,t,i})}{\exp(V_{1,t,i}) + \exp(V_{j,t,i}^*)} \\ &= \frac{\exp(V_{1,t,i})}{\exp(V_{1,t,i}) + \exp(\ln \sum_{j=2}^J \exp(V_{j,t,i}))} \\ &= \frac{\exp(V_{1,t,i})}{\sum_{j=1}^J \exp(V_{j,t,i})} \end{aligned}$$

これが多項ロジットモデルの選択確率であるが, より一般的に顧客 i が時刻 t に選択肢 j を選択する確率は

$$p_{j,t,i} = \frac{\exp(V_{j,t,i})}{\sum_{j=1}^J \exp(V_{j,t,i})}, j \in C \quad (3.6)$$

である. ロジスティクスの中でも2つの選択肢から選択する2項ロジットモデルの選択確率は下式で表され,

$$p_{j,t,i} = \frac{\exp(V_{j,t,i})}{\exp(V_{j,t,i}) + \exp(V_{k,t,i})}, j, k \in \{1, 2\} \quad (3.7)$$

多項ロジットモデルの特殊系である.

3.2.1 ロジットモデルの尤度関数と推定法

離散選択モデルは, 非集計モデルであり, 個人個人のデータを用いてモデルを推定する. ここでは顧客が I 人おり, J 個の選択肢から T_i 個の選択データが得られたとする. さらに

各顧客の選択は独立で、顧客における選択も独立であると仮定した場合、多項ロジットモデルの尤度関数は選択確率を用いて (3.8) 式となる。

$$\begin{aligned}
 L &= \prod_{i=1}^I \prod_{t=1}^{T_i} p_{j,t,i}^{y_{j,t,i}} \\
 &= \prod_{i=1}^I \prod_{t=1}^{T_i} p_{1,t,i}^{y_{1,t,i}} \cdots p_{J,t,i}^{y_{J,t,i}} \\
 &= \prod_{i=1}^I \prod_{t=1}^{T_i} \left(\frac{\exp(V_{1,t,i})}{\sum_{j=1}^J \exp(V_{j,t,i})} \right)^{y_{1,t,i}} \cdots \left(\frac{\exp(V_{J,t,i})}{\sum_{j=1}^J \exp(V_{j,t,i})} \right)^{y_{J,t,i}} \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

ここで $y_{j,t,i}$ は個人 i の t 回目の選択における選択肢 j を選択したかを表し、選択したとき 1、そうでないとき 0。

与えられた尤度関数から最尤推定法を用いてパラメータを推定するが、実際の推定では推定計算の簡便性のため (3.8) 式の両辺の対数を取った対数尤度関数を未知パラメータに関して最大化する。

$$\ln L = \sum_{i=1}^I \sum_{t=1}^{T_i} y_{j,t,i} \ln p_{j,t,i} \quad (3.9)$$

McFadden (1974) は、多項ロジットモデルの対数尤度関数が大局的に凹であり、(3.9) 式の未知パラメータに関する 1 次微分係数を 0 とした連立方程式をとけば最大値が得られることを示した。ただし (3.8) 式からわかるように非線形関数であるので最大化には Newton-Raphson 法などの数値的開放が必要である。

3.2.2 ロジットモデルの問題点

ロジットモデルは計算の簡便さから様々な角度から理論的、実証的な分析が行われており、その有効性ととも問題点も指摘されている。片平、杉田 (1994) は I.I.A 特性と個人間の異質性の問題を取り上げている。また Blattberg and Neslin (1990) は個人間の異質性、関して議論すべきだと指摘している。ここでは I.I.A. (independence from irrelevant alternatives) 特性について説明する。

ロジットモデルの選択確率式 (3.6) から 2 つの選択肢の選択確率の比に関して次式が得ら

れる。

$$\begin{aligned}
 \frac{p_{j,t,i}}{p_{k,t,i}} &= \frac{\frac{\exp(V_{j,t,i})}{\sum_i \exp(V_{i,t,i})}}{\frac{\exp(V_{k,t,i})}{\sum_i \exp(V_{i,t,i})}} \\
 &= \frac{\exp(V_{j,t,i})}{\exp(V_{k,t,i})} \\
 &= \exp(V_{j,t,i} - V_{k,t,i}). \tag{3.10}
 \end{aligned}$$

これは2つの選択肢の選択確率の比は、効用の確定項にのみ影響を受け、選択肢集合 C に含まれる他の選択肢の影響を受けないことを I.I.A. 特性または定比ルールと呼ぶ。I.I.A. 特性には長所と短所が存在する。長所としては選択肢集合に含まれる全ての選択肢を知らなくとも、その部分集合を用いてモデルを推定してもパラメータ推定値にバイアスが生じないことである。また現存しない選択肢の需要予測も、新たな選択肢の効用関数設定して選択集合に加えることで予測が可能となる。ただしこれらの長所は選択状況が I.I.A. 特性に従っている場合である。

短所としては離散選択モデルを適用する際には、すべての確率的効用項が独立ではなく、いくつかの選択肢間に相関が生じることがある。例えば飲料の選択肢が商品 A (炭酸飲料)、商品 B (ジュース)、商品 C (ウーロン茶) の3つが存在するところに新たに商品 D (ウーロン茶) が追加されたとき直感的には商品 C の選択確率に影響が及び、その他の商品には直接的に影響しないと考えるのが自然である。しかし I.I.A. 特性のために、商品 D の参集がすべての選択確率をそれぞれシェアに応じて比例的に押し下げてしまう。そこでこのような選択問題を正確に表現するためには、効用の確率項の独立性の過程を緩めたモデリングが必要となる。事項以降では I.I.A. 特性を緩和したネステッドロジットモデルについて示す。

3.3 ネステッドロジットモデル

I.I.A. 特性を緩和したモデルとしてネステッドロジットモデルについて示す。ここでは選択問題の階層構造を考える。上位ネストであるカテゴリの選択肢 $i \in C_i$ 、下位ネストである商品の選択肢 $k \in C_k$ とする。前節と同様に上位ネストの i を選択し、下位ネストの k を選択するときの効用を式 (3.11) であるとする。ただし本節では顧客を示す i と時刻を示す t は省略する。

$$U_{jk} = V_j + V_k + \epsilon_j + \epsilon_{jk} \tag{3.11}$$

ここで、 U_{jk} は選択肢 j, k の効用、 V_j, V_k は選択肢 j, k のそれぞれの効用の確定部分、 ϵ_j は選択肢 j の効用の誤差項、 ϵ_{jk} は選択肢 j, k の組み合わせ決まる効用の誤差項とする。

次に選択肢 j, k を同時に選択する確率 $P(j, k)$ は、以下のように条件付き確率と周辺確率の席によって表される。

$$P(j, k) = P(j|k)P(k) \quad (3.12)$$

また周辺確率は

$$\begin{aligned} P(j) &= \Pr(\max_k U_j \geq \max_k U_{j'}, j \neq j') \\ &= \Pr(V_j + \epsilon_j + \max_k (V_k + \epsilon_{jk}) \geq V_{j'} + \epsilon_{j'} + \max_k (V_k + \epsilon_{j'k}), j \neq j') \end{aligned} \quad (3.13)$$

ϵ_{jk} は、スケールパラメータ μ を持つガンベル分布に従うと仮定すると $\max_k (V_k + \epsilon_{jk})$ も同じスケールパラメータ μ を持つガンベル分布に従う。またこのガンベル分布のロケーションパラメータ V_d^j は

$$V_d^j = \frac{1}{\mu} \sum_k \exp(V_k)$$

となる。この値はツリーの下位レベルの合成効用 (inclusive value) またはその形式からログサム (logsum) 変数と呼ばれる。この値を用いて式 (3.13) を書き直すと

$$P(j) = \Pr(V_j + V_j' + \epsilon_j + \epsilon_j' \geq V_{j'} + V_{j'}' + \epsilon_{j'} + \epsilon_{j'}') \quad (3.14)$$

ただし、

$$\epsilon_j' = \max_k (V_k + \epsilon_{jk}) - V_j' \quad (3.15)$$

である。ここで、 ϵ_d の仮定より周辺確率は以下のロジットモデル式で与えられる。

$$P(j) = \frac{\exp(\mu(V_j + V_j'))}{\sum_{j'} \exp(\mu(V_j + V_j'))} \quad (3.16)$$

次に条件付き確率 $P(k | j)$ は V_j, ϵ_j に影響しないため、

$$P(k | j) = \Pr(U_{jk} \geq U_{jk'}, k \in, k' \neq k | j) \quad (3.17)$$

$$= \Pr(V_k + \epsilon_{jk} \geq V_{k'} + \epsilon_{jk'}, k' \neq k | j) \quad (3.18)$$

となり ϵ_{jk} はスケールパラメータ μ をもつガンベル分布に従うと仮定しているので、条件付き確率は：

$$P(k | j) = \frac{\exp(\mu(V_j + V_{jk}))}{\sum_k \exp(\mu(V_j + V_{jk}))}. \quad (3.19)$$

従って、選択肢 j, k を選択する同時確率は

$$P(j, k) = P(k | j)P(j) \quad (3.20)$$

$$= \frac{\exp(\mu(V_j + V_{jk}))}{\sum_k \exp(\mu(V_j + V_{jk}))} \frac{\exp(\mu(V_j + V_j'))}{\sum_{j'} \exp(\mu(V_j + V_j'))} \quad (3.21)$$

となる。

3.3.1 ネステッドロジットモデルの尤度関数と推定法

ロジットモデル同様に、個人個人のデータを用いてモデルを推定する。ここでは顧客が I 人おり、 J 個の選択肢から T_i 個の選択データが得られたとする。さらに各顧客の選択は独立で、顧客における選択も独立であると仮定した場合、ネステッドロジットモデルの尤度関数は選択確率を用いて (3.22) 式となる。

$$L = \prod_{i=1}^I \prod_{t=1}^{T_i} \prod_{j=1}^{J_i} \left(p_{j,t,i}^{(1)} (p_{j,t,i}^{(2)})^{y_{1|j,t,i}} \dots (p_{K|j,t,i}^{(2)})^{y_{1|K|j,t,i}} \right)^{y_{j,t,i}} \quad (3.22)$$

$$= \prod_{i=1}^I \prod_{t=1}^{T_i} \prod_{j=1}^{J_i} \left(\frac{\exp(V_{1,t,i})}{\sum_{j=1}^J \exp(V_{j,t,i})} \right)^{y_{1,t,i}} \dots \left(\frac{\exp(V_{J,t,i})}{\sum_{j=1}^J \exp(V_{j,t,i})} \right)^{y_{J,t,i}} \quad (3.23)$$

ここで $y_{j,t,i}$ は顧客 i の t 回目の選択における選択肢 j を選択したかを表し、選択したとき 1、そうでないとき 0。

ネステッドロジットモデルの推定方法には、同時推定と段階推定の 2 通りの方法がある。

同時推定は式 (3.21) で表される選択確率を用いて、前節のロジットモデルと同様に尤度関数を表し、最尤推定法にてパラメータ推定する。ただし得られる尤度関数は大域的な凹関数ではないため得られた値が真の最尤推定地でない可能性もある。

3.4 本研究のモデル化

来店・購買の生起モデルは第 n 日における顧客 i の来店 (来店: $y_{1,n,i} = 1$, 非来店: $y_{1,n,i} = 0$) と、ある商品の購買 (購買: $y_{2,n,i} = 1$, 非購買: $y_{2,n,i} = 0$) を離散選択モデルで表現する。このとき $y_{1,n,i}$, $y_{2,n,i}$ はベルヌーイ過程に従うと仮定すると、来店と購買の同時確率 $p(y_{1,n,i}, y_{2,n,i})$ は次のようになる:

$$\begin{aligned} p(y_{1,n,i}, y_{2,n,i}) &= p(y_{2,n,i} | y_{1,n,i}) p(y_{1,n,i}) \\ &= (y_{1,n,i} p_{2,n,i})^{y_{1,n,i} y_{2,n,i}} (1 - y_{1,n,i} p_{2,n,i})^{1 - y_{1,n,i} y_{2,n,i}} (p_{1,n,i})^{y_{1,n,i}} (1 - p_{1,n,i})^{1 - y_{1,n,i}}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

ここで $p_{1,n,i}$, $p_{2,n,i}$ は顧客 i の第 n 日における来店確率および購買確率である。それらは、次項で示す顧客 i の第 n 日における来店と購買の効用関数を用いることで示すことができる。

3.4.1 来店の効用モデル

本項では来店効用 $u_{1,n,i}$ を定式化する。定式化にあたって来店効用は、顧客間での共通性は仮定せず、連続的に変動すると仮定する。また来店効用は時系列的影響要素 (トレンド成

分, 前回来店からの経過日数, 前日来店の有無) が影響すると仮定し, 本モデルでは次のように定式化する:

$$\begin{aligned} u_{1,n,i} &= V_{1,n,i} + \epsilon_{1,n,i} \\ &= t_{n,i} + \beta_{n,i}^{(1)} x_{n,i}^{(1)} + \beta_{n,i}^{(2)} x_{n,i}^{(2)} + \beta_{n,i}^{(3)} \ln(1 + \exp(u_{2,n,i})) + \epsilon_{1,n,i}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

ここで, $t_{n,i}$ は第 n 日における個人 i の長期的変動傾向を示すトレンド成分, $\beta_{n,i}^{(j)}$ ($j = 1, \dots, 3$) は顧客 i の第 n 日における説明変数の影響度を示す時変回帰係数である. 説明変数である $x_{n,i}^{(1)}$, $x_{n,i}^{(2)}$ は「前日来店の有無」ならびに「前回来店からの経過日数の対数」をそれぞれ示す. また, 最終項は顧客 i の第 n 日において購買生起の効用から来店効用が受ける影響で表すログサム変数と呼ばれるものであり, 商品の購入時に今回の来店へ寄与する影響度である.

3.4.2 来店効用の時変係数のモデル化

来店効用のトレンド成分 $t_{n,i}$ と時変係数 $\beta_{n,i}^j$ はランダムウォークに従うと仮定し,

$$t_{n,i} = t_{n-1,i} + v_{n,t_{n,i}}, \quad (3.26)$$

$$\beta_{n,i}^{(j)} = \beta_{n-1,i}^{(j)} + v_{n,\beta_{n,i}^{(j)}}, \quad (j = 1, 2) \quad (3.27)$$

$$\log\left(\frac{\beta_{n,i}^{(j)}}{1 - \beta_{n,i}^{(j)}}\right) = \log\left(\frac{\beta_{n-1,i}^{(j)}}{1 - \beta_{n-1,i}^{(j)}}\right) + v_{n,\beta_{n,i}^{(j)}}, \quad (j = 3) \quad (3.28)$$

と定式化する. 式 (3.26), (3.27), (3.28) 中の $v_{n,t_{n,i}}$, $v_{n,\beta_{n,i}^{(j)}}$ はそれぞれ $N(0, \tau_{t_i}^2)$, $N(0, \tau_{\beta_i^{(j)}}^2)$, $j = 1, 2, 3$ に従う確率的変動項である. (3.28) のモデル化は $0 < \beta_{n,i}^{(3)} < 1$ に制約するための変換であり, $\beta_{n,i}^{(3)}$ は 2 つの選択肢の選択確率のオッズが, 他の選択肢の存在に依存しないという IIA (Independence from Irrelevant Alternatives) 特性を緩和するための制約である (McFadden (1981) Griliches, Engle, Intriligator and McFadden (1983)).

3.4.3 購買の効用モデル

本節では購買効用のモデル化を示す. 購買効用は来店効用と同様に顧客間での共通性は仮定せず, 連続的に変動すると仮定する. そのため, 購買効用は FSP によるプロモーションによる影響と時間的に変動する時系列的要素が影響すると仮定し, 次のように定式化する:

$$\begin{aligned} u_{2,n,i} &= V_{2,n,i} + \epsilon_{2,n,i} \\ &= \gamma_{n,i}^{(1)} x_{n,i}^{(3)} + \gamma_{n,i}^{(2)} x_{n,i}^{(4)} + \gamma_{n,i}^{(3)} x_{n,i}^{(5)} + \gamma_{n,i}^{(4)} x_{n,i}^{(6)} + \epsilon_{2,n,i}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

ここで、(3.29) 式中の説明変数である $x_{n,i}^{(3)}$, $x_{n,i}^{(4)}$, $x_{n,i}^{(5)}$, $x_{n,i}^{(6)}$ は、「前日購買からの経過日数の対数」、「月内の FSP の利用可能数」、「店舗販売価格と FSP が利用可能時の価格差」、「FSP の利用有無」をそれぞれ表す。 $\gamma_{n,i}^{(j)}$ ($j = 1, \dots, 4$) は、来店効用と同様に顧客 i の第 n 日における説明変数の影響度を示す時変回帰係数である。

$x_{n,i}^{(4)}$ は月内で利用可能な FSP の数を表す。FSP は月内に利用可能な商品とそれに基づく数量が月初に発行 (発行される商品・数量は個人毎に異なる) される。そのため $x_{n,i}^{(4)}$ は月初では FSP の利用可能な上限値とし、FSP を利用する毎に 1 減らした値である。また $x_{n,i}^{(4)}$, $x_{n,i}^{(5)}$, $x_{n,i}^{(6)}$ はいずれも FSP に関する項であるが、特に $x_{n,i}^{(4)}$ の月内の FSP の利用可能数と $x_{n,i}^{(6)}$ の FSP の利用有無に相関が予想され、高い場合には推定がうまくいかず意図しない値を取る可能性がある。そこであとで述べる分析対象となる顧客の $x_{n,i}^{(4)}$, $x_{n,i}^{(6)}$ の相関係数を確認したところ相関係数の平均値、分散値はそれぞれ 0.1547, 0.0014 とそれほど高くない。また次節にて $x_{n,i}^{(4)}$ の時変係数である $\gamma_{n,i}^{(2)}$ には制約を課しているため符号が反転してしまうなどの意図しない推定値を得ることはない。

3.4.4 購買効用の時変係数のモデル化

購買効用の時変回帰係数 $\gamma_{n,i}^{(j)}$ も来店効用の時変回帰係数である $\beta_{n,i}^{(j)}$ と同様にランダムウォークに従うと仮定し、

$$\begin{aligned}\gamma_{n,i}^{(j)} &= \gamma_{n-1,i}^{(j)} + v_{n,\gamma_{n,i}^{(j)}} \quad (j = 1, 4) \\ \log(\gamma_{n,i}^{(j)}) &= \log(\gamma_{n-1,i}^{(j)}) + v_{n,\gamma_{n,i}^{(j)}} \quad (j = 2, 3)\end{aligned}\tag{3.30}$$

と定式化する。ただし、式 (3.30) 中の $v_{n,\gamma_{n,i}^{(j)}}$, ($j = 1, \dots, 4$) は平均 0, 分散 $\tau_{\gamma_i}^2$, ($j = 1, \dots, 4$) の正規分布に従う確率的変動項である。なお、 $j = 2, 3$ は対数変換がランダムウォークに従うとしている。これはセールスプロモーションの影響を表す $\gamma_{n,i}^{(2)}$ (「月内の FSP の利用可能数」の影響度), $\gamma_{n,i}^{(3)}$ (「店舗販売価格と FSP が利用可能時の価格差」の影響度) は購買へ正の効果をもたらすかもしれないが、その効果が負になることはないとは仮定した。そのため $\gamma_{n,i}^{(j)} > 0$, ($j = 2, 3$) の制約を満たす必要があるためである。

構築したモデルを整理すると、来店効用はトレンド成分、説明変数である $x_{n,i}^{(1)}$, $x_{n,i}^{(2)}$, および購買効用からの影響とその影響度を示す時変回帰係数 $\beta_{n,i}^{(1)}$, $\beta_{n,i}^{(2)}$, $\beta_{n,i}^{(3)}$ からなる。購買効用は説明変数である $x_{n,i}^{(3)}$, $x_{n,i}^{(4)}$, $x_{n,i}^{(5)}$, $x_{n,i}^{(6)}$ と、その影響度を示す時変回帰係数 $\gamma_{n,i}^{(1)}$, $\gamma_{n,i}^{(2)}$, $\gamma_{n,i}^{(3)}$, $\gamma_{n,i}^{(4)}$ からなる。各変数をまとめたものを表 3.1 に示し、それらの変数間の依存関係を図 3.1 に示す。図中のグラフはリンクによって接続されたノードの集まりからなる有向非循環グラフで

ある。ノードのうち丸で囲まれたものは時変回帰係数であり、四角で囲まれたものはデータである。

表 3.1: 効用で用いる変数

変数	説明
$t_{n,i}$	トレンド成分
$x_{n,i}^{(1)}$	前日来店の有無
$x_{n,i}^{(2)}$	前回来店からの経過日数の対数
$x_{n,i}^{(3)}$	前回購買からの経過日数の対数
$x_{n,i}^{(4)}$	月内の FSP の利用可能数
$x_{n,i}^{(5)}$	店舗販売価格と FSP が利用可能時の価格差
$x_{n,i}^{(6)}$	FSP の利用有無
$\beta_{n,i}^{(1)}$	前日来店の有無の影響度を表す時変回帰係数
$\beta_{n,i}^{(2)}$	前回来店からの経過日数の対数の影響度を表す時変回帰係数
$\beta_{n,i}^{(3)}$	購買効用からの影響度を表す時変回帰係数
$\gamma_{n,i}^{(1)}$	前回購買からの経過日数の対数の影響度を表す時変回帰係数
$\gamma_{n,i}^{(2)}$	月内の FSP の利用可能数の影響度を表す時変回帰係数
$\gamma_{n,i}^{(3)}$	店舗販売価格と FSP が利用可能時の価格差の影響度を表す時変回帰係数
$\gamma_{n,i}^{(4)}$	FSP の利用有無の影響度を表す時変回帰係数
$y_{1,n,i}$	来店の有無
$y_{2,n,i}$	購買の有無
$\mathbf{y}_{n,i}$	$y_{1,n,i}, y_{2,n,i}$ を成分とするベクトル

3.4.5 非線形非ガウス型状態空間モデルによる表現

前節までに示した来店と購買の同時モデリングは非線形非ガウス型状態空間モデルによって表現する (以下では非線形非ガウス型状態空間モデルを単に状態空間モデルと呼ぶ) ことができ、時変回帰係数の推定は状態空間モデルにおける状態を推定する問題として定式化できる (北川 (2005))。状態空間モデルは観測モデルとシステムモデルと呼ばれる 2 つの式で定式化され、データの観測される定式化を記述するモデルを観測モデル、時変回帰係数の時間発展の定式化を記述するモデルをシステムモデルと呼ぶ。本モデルでは、観測モデルを

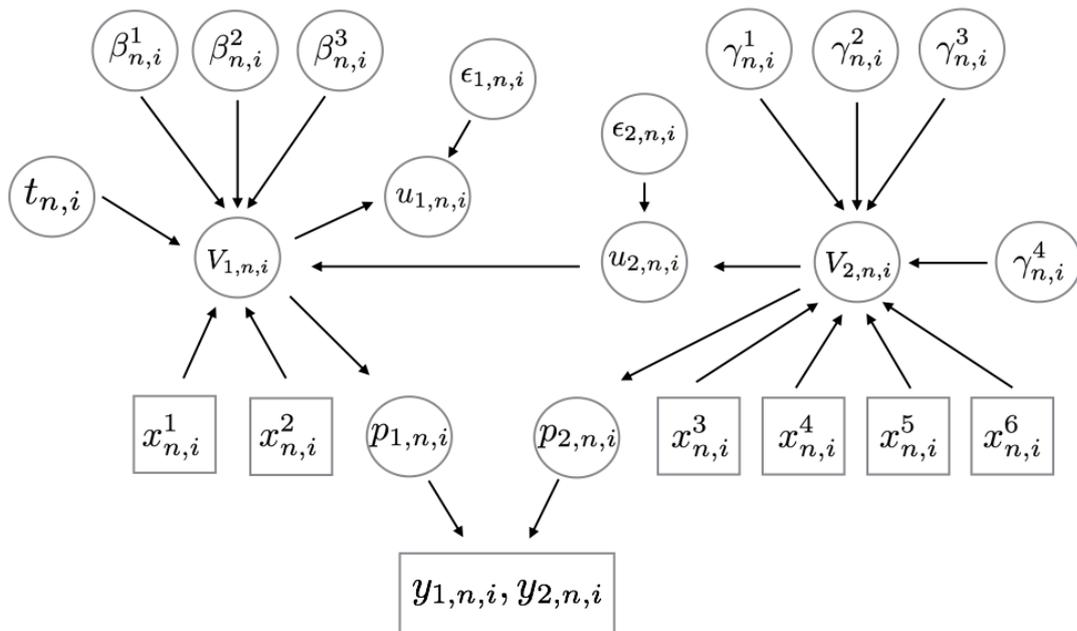


図 3.1: モデルの有向非循環グラフ. 丸は時間的に変動する項を表し, 四角は観測可能なデータを表す.

(3.24) とし、システムモデルを

$$\mathbf{z}_{n,i} = f(\mathbf{z}_{n-1,i}, \mathbf{v}_{n,i}) \quad (3.31)$$

とおくことで、状態空間モデルの形式で表現できる:

$$p(y_{1,n,i}, y_{2,n,i}) = (y_{1,n,i} p_{2,n,i})^{y_{1,n,i} y_{2,n,i}} (1 - y_{1,n,i} p_{2,n,i})^{1 - y_{1,n,i} y_{2,n,i}} (p_{1,n,i})^{y_{1,n,i}} (1 - p_{1,n,i})^{1 - y_{1,n,i}} \quad (3.32)$$

$$\mathbf{z}_{n,i} = f(\mathbf{z}_{n-1,i}, \mathbf{v}_{n,i}) \quad (3.33)$$

ただし $\mathbf{z}_{n,i}, \mathbf{v}_{n,i}$ は状態ベクトルおよびシステムノイズを示し、次式になる:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{n,i} &= (t_{n,i}, \beta_{n,i}^{(1)}, \beta_{n,i}^{(2)}, \log\left(\frac{\beta_{n,i}^{(3)}}{1 - \beta_{n,i}^{(3)}}\right), \gamma_{n,i}^{(1)}, \log(\gamma_{n,i}^{(2)}), \log(\gamma_{n,i}^{(3)}), \gamma_{n,i}^{(4)}, p_{1,n,i}, p_{2,n,i})^T, \\ \mathbf{v}_{n,i} &= (v_{n,t_{n,i}}, v_{n,\beta_{n,i}^{(1)}}), v_{n,\beta_{n,i}^{(2)}}, v_{n,\beta_{n,i}^{(3)}}, v_{n,\gamma_{n,i}^{(1)}}, v_{n,\gamma_{n,i}^{(2)}}, v_{n,\gamma_{n,i}^{(3)}}, v_{n,\gamma_{n,i}^{(4)}}, \epsilon_{2,n,i})^T. \end{aligned} \quad (3.34)$$

\mathbf{T} は転置を表す。さらに、

$$\mathbf{v}_{n,i} \sim \mathbf{N}(0, \Sigma_i), \quad \Sigma_i = \text{diag}(\tau_{t_i}^2, \tau_{\beta_i^{(1)}}^2, \tau_{\beta_i^{(2)}}^2, \tau_{\beta_i^{(3)}}^2, \tau_{\gamma_i^{(1)}}^2, \tau_{\gamma_i^{(2)}}^2, \tau_{\gamma_i^{(3)}}^2, \tau_{\gamma_i^{(4)}}^2)$$

とする。

3.4.6 状態ベクトルおよびパラメータ推定

構築した状態空間モデルの状態推定方法として粒子フィルタを用いる。状態空間モデルにおける状態ベクトルの推定方法として有名な方法はカルマンフィルタであるが、カルマンフィルタが適用可能であるのは線形ガウス型状態空間モデルに限られる。そのため、本研究で構築したモデルはシステムモデルは非ガウス型であるためカルマンフィルタを用いることができない。そこで、非線形非ガウス型状態空間モデルの状態ベクトル $\mathbf{z}_{n,i}$ を推定するために開発された粒子フィルタを用いる Kitagawa (1998)。粒子フィルタは一般の非ガウス型分布を多数の粒子で近似し、非線形・非ガウス型の状態空間モデルの状態推定に適用可能な手法である。

本モデルには時変回帰係数のほかにも次の未知パラメータ

$$\theta = (\tau_{t_i}^2, \tau_{\beta_i^{(1)}}^2, \tau_{\beta_i^{(2)}}^2, \tau_{\beta_i^{(3)}}^2, \tau_{\gamma_i^{(1)}}^2, \tau_{\gamma_i^{(2)}}^2, \tau_{\gamma_i^{(3)}}^2, \tau_{\gamma_i^{(4)}}^2), \quad (3.35)$$

を含む。これらの最尤推定値は対数尤度の最大化によって決定する。ただし粒子フィルタで求めた対数尤度にはモンテカルロ法に由来する近似誤差が存在する。そのためパラメータの

探索には微分情報を不要とし直接的に対数尤度を評価する最適化手法を用いる必要がある。微分情報を用いずにパラメータを最適化する汎用的な方法として Nelder-Mead 法がある。多角形の探索領域を拡大・縮小・反転を繰り返すことで最適値を探索する。そのため、計算量が小さく実装も容易であるといったメリットがあげられるが、関数の評価回数が多くなるため効率的な探索方法であるとは言えない。本研究で探索する未知パラメータ θ の次元は低くないため効率的な探索が必要となる。そこで本研究では、Kennedy (2011) が提案した微分情報を用いず複数の初期値から大域的最適解を効率よく探索する粒子群最適化 (Particle Swarm Optimization: PSO) を用いる。PSO は生物の集団行動をもとに開発されたアルゴリズムあり、「探索点が複数個存在する多点探索アルゴリズムである」、「多点間で互いに最良解に関する情報を共有しパラメータ空間を探索する」といった特徴を有する。またアルゴリズムは基本的な算術演算しか用いないため、計算量も大きくないといった特徴も併せ持つ。

PSO のアルゴリズムの詳細は A.3 に示すが、PSO を用いることで未知パラメータ θ 以外にも PSO のパラメータを選択する必要が生じる。PSO のパラメータの選択については過去に様々な提案がされており、本研究では、計算量が小さく複雑な手続きが不要である M.ClercClerc and Kennedy (2002) らが安定性解析から導出した値を設定 ($w = 0.729, c_1 = c_2 = 1.4955$) した。

3.5 データ概要

本研究は経営科学系研究部会連合協議会主催、平成 26 年度データ解析コンペティションで提供されたデータを利用した。これは、2013 年 7 月から 2014 年 6 月までのスーパーにおける ID 付きの POS データであり、10 店舗分 (北海道 5 店舗、関東 5 店舗) の購買履歴と FSP の発行情報からなる。FSP は過去の購買状況から個人毎にパーソナライズされた 20 商品の割引券が月初に発行される。本研究の分析対象はプロモーション効果を推定するため、スーパーの中でも高価格帯であるソーセージと低価格帯である納豆を対象とする。先行研究である佐藤ら佐藤・樋口 (2008) では 2 階層目のデータにカテゴリレベルの購買履歴を利用していたが、本研究では個人毎にカスタマイズされたセールスプロモーションの影響を推定するために商品レベルの購買履歴を利用する。

使用するデータの販売総数ベスト 5 のソーセージ・納豆に関する統計量を表 3.2, 3.3 に示す。ソーセージ A は FSP によるプロモーションを利用して購買する顧客が多く全店舗での販売総数が 1 位となっている。またその他のソーセージと比べて FSP によるプロモーションの利用も多い。そのため本研究では FSP の利用による購買が多いソーセージ A の購買履歴を利用する。同様に低価格帯の納豆においても販売数・FSP の利用が多い納豆 A のデー

表 3.2: 全店舗のソーセージ販売数ベスト 5 に関する統計量

製品名	平均販売価格	販売数	FSP による購買回数
ソーセージ A	371.25	37607	25652
ソーセージ B	260.76	13360	167
ソーセージ C	189.25	12369	0
ソーセージ D	238.69	8010	3017
ソーセージ E	219.69	7234	1072

表 3.3: 全店舗の納豆販売数ベスト 5 に関する統計量

製品名	平均販売価格	販売数	FSP による購買回数
納豆 A	72.5	95950	51678
納豆 B	95.2	11880	3763
納豆 C	90.1	14168	5510
納豆 D	73.0	6460	3457
納豆 E	80.3	3047	1059

タを利用する。

また推定の対象とした顧客は、期間中に FSP を利用して 10 回以上ソーセージ A を購入した顧客に限定した (ソーセージ A の対象顧客数:478 名)。これは FSP が購買へ与える効果の時間変化を見るために、ある程度のデータが必要であるためである。データから、顧客は月に最大で 3 回の割引を利用する権利を得ることができるため、FSP の利用回数が 10 回以上の顧客は 3 ヶ月以上の利用がある顧客である。そのため FSP の長期的な変動を見るにあたって適当な期間であると判断した。ゆえに、本制約は検証の目的から課したものであり、推定に必須の条件ではない。従って FSP の利用がなくとも推定は可能であるが、本稿の目的に沿わないため対象外としている。また、納豆 A の対象顧客は高価格帯のソーセージ A と比較するため、ソーセージ A と納豆 A を 10 回以上購買した顧客を対象とした (納豆 A の対象顧客数:105 名)。

表 3.4 には対象顧客のソーセージの購買回数の比率 (商品ごとの購買回数÷総購買回数) を示す。表から分かる通り、ソーセージ A が他の商品に比べて圧倒的に購買回数の比率が高い。そのためソーセージ A に限っては他の商品からの影響は無視できると仮定し、モデル化は来店の有無とソーセージ A の購買の有無を考えネスト型の 2 項ロジットモデルを用いる。

表 3.4: 対象顧客のソーセージカテゴリにおける購買回数比率

製品名	平均値	分散値
ソーセージ A	96.6	0.76
ソーセージ B	1.3	0.31
ソーセージ C	0.2	0.08
ソーセージ D	1.4	0.29
ソーセージ E	0.02	2.14

図 3.2, 図 3.3 は北海道と関東の店舗におけるソーセージ A と納豆 A の月別の販売個数を示している。図中の棒グラフ下部の色の濃い部分が FSP の利用がない販売個数で、上部の色の薄い部分が FSP の利用による販売個数である。両店舗の販売数に違いはあるものの FSP の利用による購買が大部分を占めていることが分かる。

図 3.4, 図 3.5 に月別のソーセージ A・納豆 A の価格変動を示す。図中の点線が FSP を利用しない通常購入の場合の価格の平均値であり、黒線が FSP による割引後の購買価格の平均値である。ただし、2014 年 1 月以降は現金値引きからポイント付与制度へと移行しているため、付与されるポイント分を購買価格から差し引いた値である。ソーセージ A の価格はデータの 350 円 ~ 380 円の間を推移しており、FSP 利用時の価格差はデータの前半では

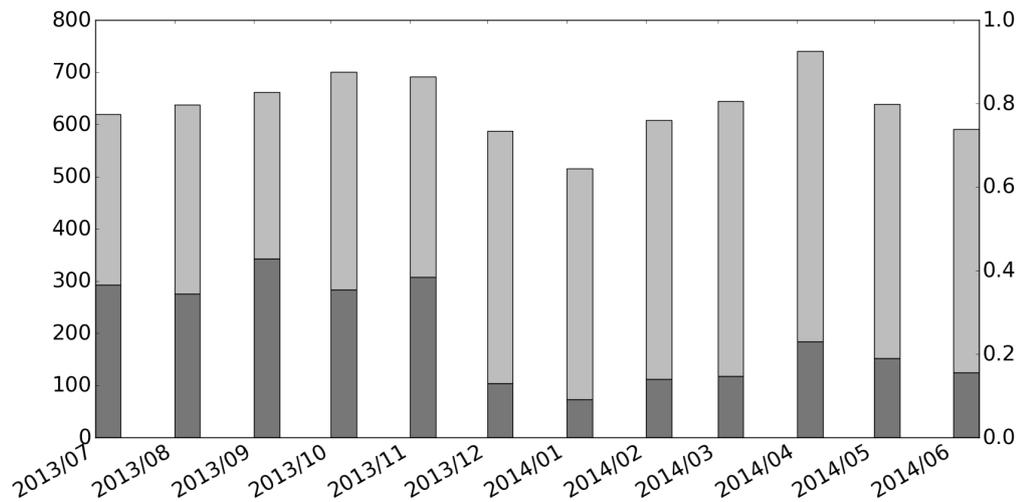
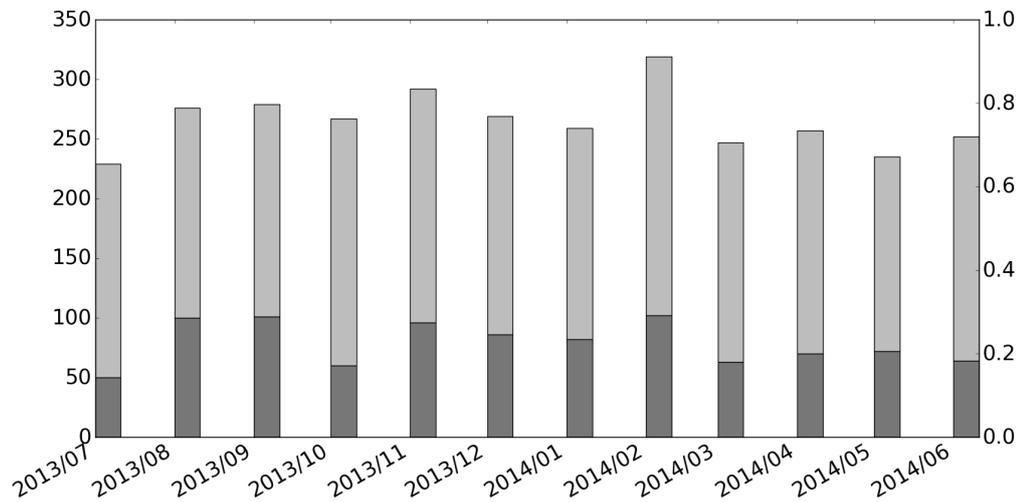


図 3.2:ソーセージ A の月別販売数 (上:北海道の店舗, 下:関東の店舗) グラフの色の薄い部分が FSP 価格による販売個数, 色の濃い部が通常販売価格での販売個数である. FSP の利用状況は地域による差はほとんどない.

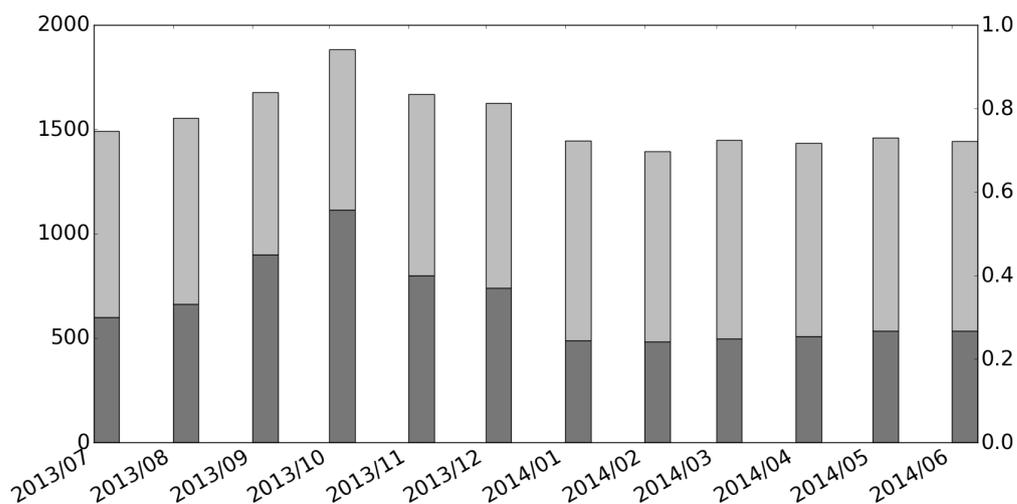
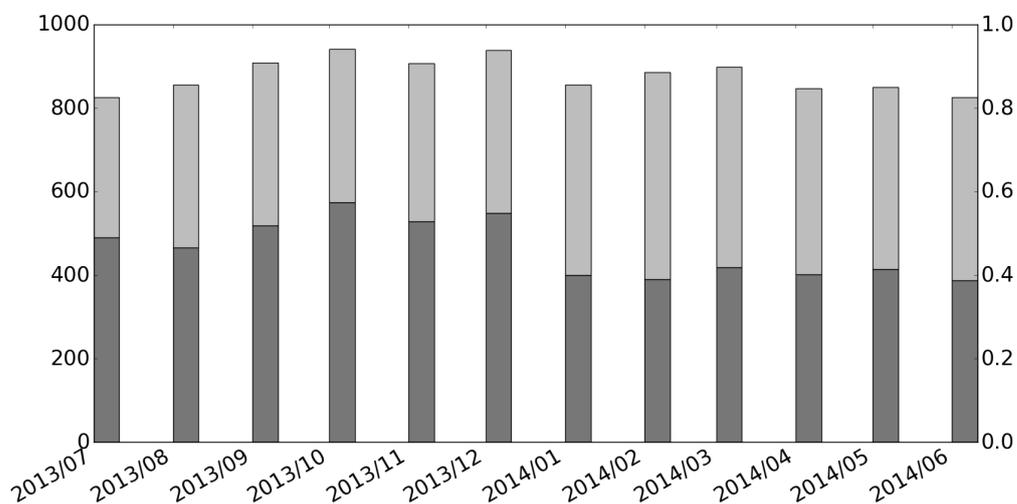


図 3.3: 納豆 A の月別販売数 (上:北海道の店舗, 下:関東の店舗) グラフの色の薄い部分が FSP 価格による販売個数, 色の濃い部が通常販売価格での販売個数である. ソーセージ A と同様に FSP の利用状況は地域による差はほとんどない.

一定価格で販売されているが、中盤以降からは店頭販売価格の変動に左右され価格が上下している。また北海道の店舗と関東の店舗では共に FSP 利用時の店頭販売価格との価格差は最大で 15 円程度になり、地域による差は見られない。納豆 A は前半に価格差が大きくなっているものの、後半にいくにしたがって北海道と関東に価格差はなくなっている。

3.6 推定結果

本節では 3.4 節で示したモデルのソーセージ A に対する推定結果を示す。なお推定には粒子フィルタを用い、固定ラグ数 $L = 20$ として粒子スモウザにより平滑化分布を求めた。

図 3.6 は期間中の顧客 A の来店確率の推定値 (平滑化後) と来店 ($y_{1,n,i}$) の有無と購買確率の推定値 (平滑化後) と購買 ($y_{2,n,i}$) の有無を図示したものである。グラフ上の中央に引いたラインは確率が 50% となる位置である。実際に来店している (購買している) 場合には推定値が 50% を超えており、そうでない場合は 50% を下回っている。モデルの推定値は顧客の来店と購買を的確に判別している様子が見て取れる。

佐藤・樋口 (2007, 2008) と同様に来店確率、購買確率を (3.36) に従って算定し、モデルの現況再現性を確認した。はじめに来店と購買の有無の推定値を式 (3.36) で定義する。

$$\begin{aligned} y_{1,n,i}^s &= \begin{cases} 1 & (p_{1,n,i}^s \geq 0.5) \\ 0 & (p_{1,n,i}^s < 0.5), \end{cases} \\ y_{2,n,i}^s &= \begin{cases} 1 & (p_{2,n,i}^s \geq 0.5) \\ 0 & (p_{2,n,i}^s < 0.5). \end{cases} \end{aligned} \quad (3.36)$$

ただし、 $y_{1,n,i}^s, y_{2,n,i}^s$ は来店の有無、購買の有無の推定値を示し、 $p_{1,n,i}^s, p_{2,n,i}^s$ はそれぞれ個人 i の第 n 日における来店確率と購買確率の平滑化推定値を示す。次に算出した来店・購買の有無の推定値を用い、式 (3.37) で実績値と推定値の誤判別率を算出し、モデルの判別の良さを検証する：

$$\begin{aligned} RC_k &= \frac{\sum_{i=1}^N RC_{i,k}}{N}, \\ RC_{i,k} &= \frac{\sum_{n \in C_{i,k}} I(y_{l,n,i}^s, y_{l,n,i})}{N_k}, (l = 1, 2). \end{aligned} \quad (3.37)$$

ただし、 N_k は来店生起の判別における 3 つのカテゴリ (非来店の誤判別、来店の誤判別、全体の誤判別) に応じて、「非来店日数 ($k = 1$)」、「来店日数 ($k = 2$)」、「総サンプル数 ($k = 3$)」

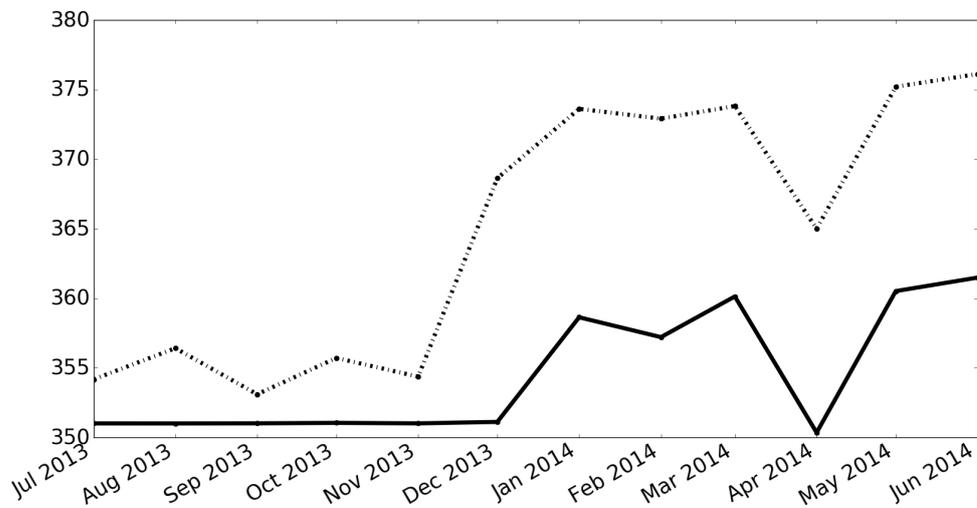
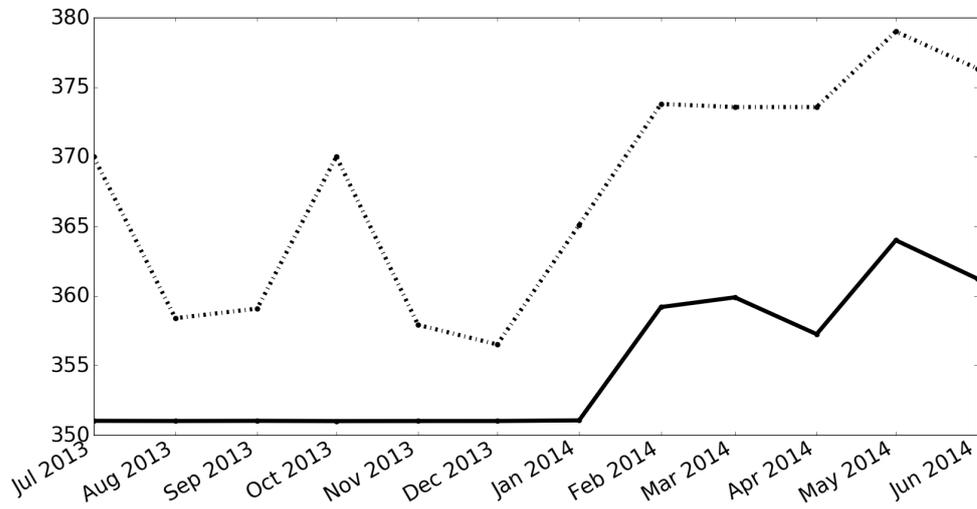


図 3.4:ソーセージ A の月別平均販売価格 (上:北海道の店舗, 下:関東の店舗) 実線が FSP の平均販売価格, 破線が店頭販売価格と示す. FSP の利用状況と同じく平均販売価格は地域による差はほとんどない

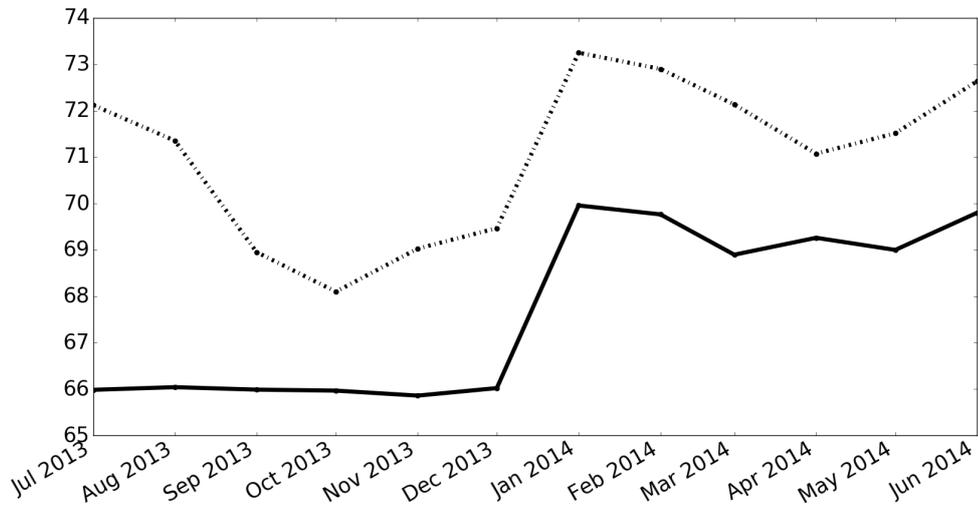
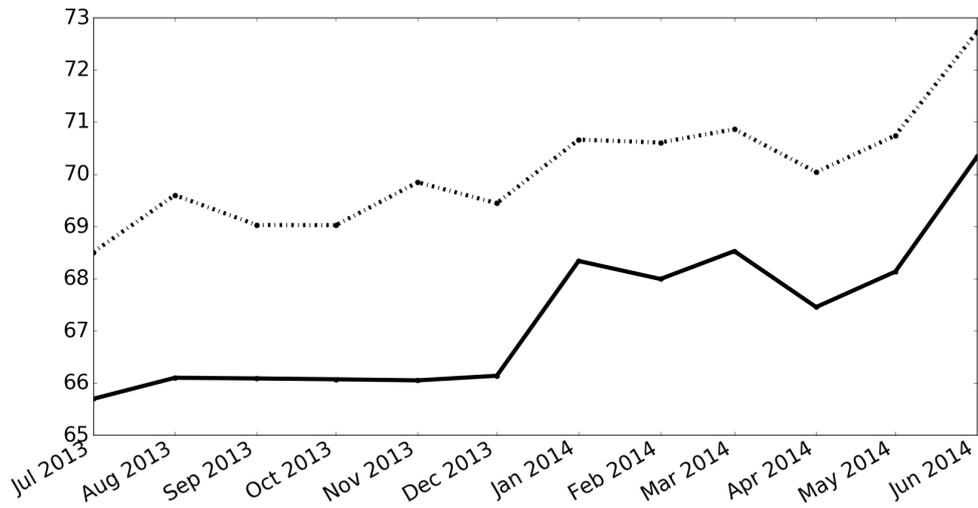


図 3.5: 納豆 A の月別平均販売価格 (上:北海道の店舗, 下:関東の店舗) 実線がFSP の平均販売価格, 破線が店頭販売価格と示す. 関東では期間の前半で価格差が大きくなっているが後半では北海道の店舗と差額は変わらない.

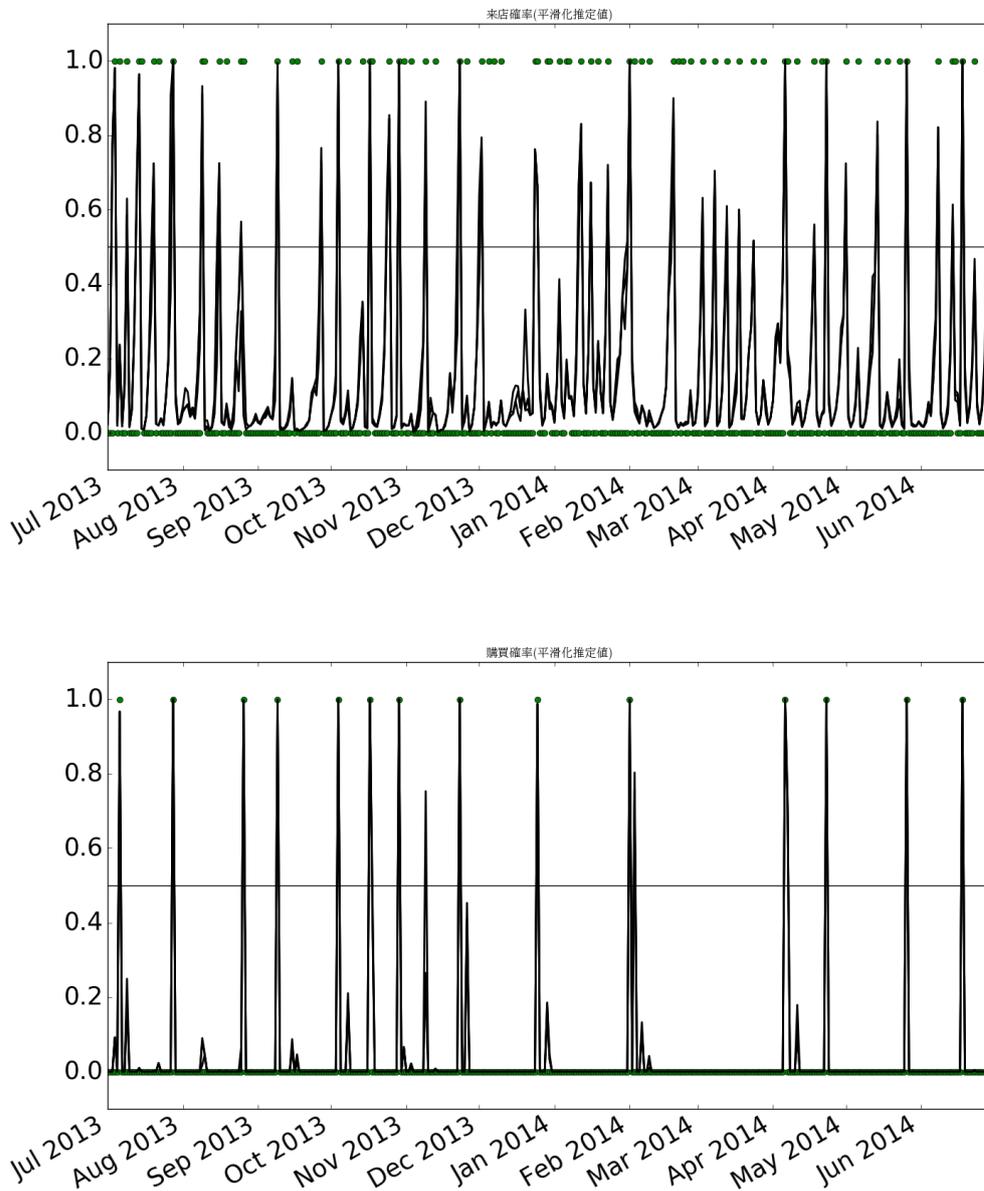


図 3.6: 来店確率 [上] と購買確率 [下] の推定値 (丸が来店と購買の有無を示す)

となる。また購買生起の場合も同様に、「来店し購買しないの日数 ($k = 4$)」、「来店し購買した日数 ($k = 5$)」、「総購買日数 ($k = 6$)」を用いる。一方、 $C_{i,k}$ は来店生起の判別における3つのカテゴリに応じて「非来店だった日の集合 ($k = 1$)」、「来店した日の集合 ($k = 2$)」、「すべての日の集合 ($k = 3$)」である。また購買生起の判別の場合、「来店し非購買だった日の集合 ($k = 4$)」、「来店し購買した日の集合 ($k = 5$)」、「購買した日の集合 ($k = 6$)」を用いる。また (3.37) の $I(y_{l,n,i}^s, y_{l,n,i})$ を

$$I(a,b) = \begin{cases} 1 & (a \neq b) \\ 0 & (a = b) \end{cases} \quad (3.38)$$

と定義する。

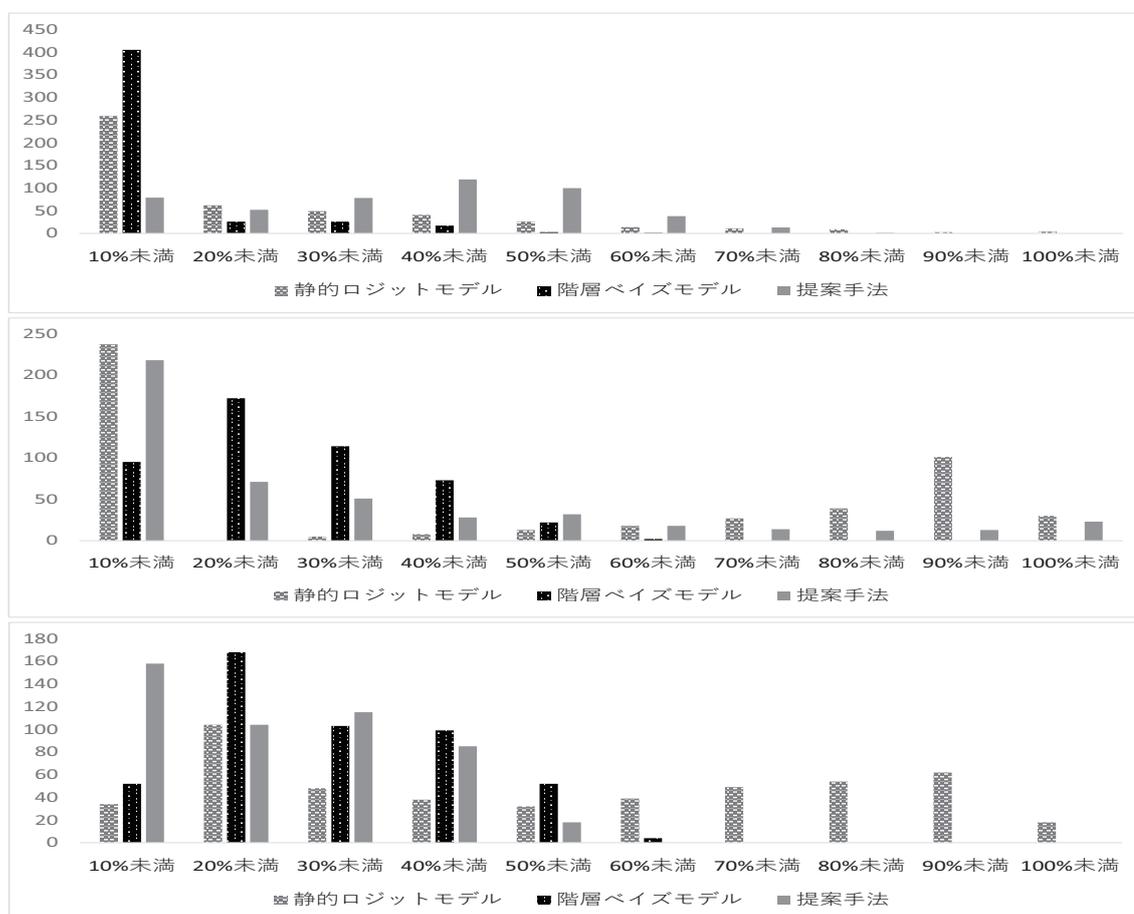


図 3.7: 来店確率の誤判別率の分布状況 [上:来店の誤判別数, 中:非来店の誤判別数, 下:全体の誤判別数]

図 3.7 には来店を非来店, 非来店を来店, 全体の誤判別数の分布状況を示す。図中には提案手法と他の手法とを比較するために次節にて説明する個人毎に推定する静的ネステッドロジットモデル (以下, 静的モデル) と全データ用いて個人毎に推定する階層ベイズネステッド

ドロジットモデル (以下, 階層ベイズモデル) の結果を示す.

3.6.1 静的ネステッドロジットモデル

静的ネステッドロジットモデルは同様に来店効用 (式 3.25) と購買効用 (式 3.29) をそれぞれ式 (3.39), (3.40) のように, 時変係数を時間変動しないように修正する.

$$u_{1,n,i} = t_i + \beta_{1,i}^1 x_{n,i}^1 + \beta_i^2 x_{n,i}^2 + \beta_i^3 \ln(1 + \exp(u_{2,n,i})) + \epsilon_{1,n,i}. \quad (3.39)$$

$$u_{2,n,i} = \gamma_i^1 x_{n,i}^3 + \gamma_i^2 x_{n,i}^4 + \gamma_i^3 x_{n,i}^5 + \gamma_i^4 x_{n,i}^6 + \epsilon_{2,n,i}. \quad (3.40)$$

3.6.2 階層ベイズネステッドロジットモデル

階層ベイズネステッドロジットモデルは前述の政敵ネステッドロジットモデルと同様に来店効用 (式 3.25) と購買効用 (式 3.29) をそれぞれ式 (3.41), (3.42) のように修正し推定した.

$$u_{1,n,i} = t_i + \beta_{1,i}^{(1)} x_{n,i}^{(1)} + \beta_i^{(2)} x_{n,i}^{(2)} + \beta_i^{(3)} \ln(1 + \exp(u_{2,n,i})) + \epsilon_{1,n,i}. \quad (3.41)$$

$$u_{2,n,i} = \gamma_i^{(1)} x_{n,i}^{(3)} + \gamma_i^{(2)} x_{n,i}^{(4)} + \gamma_i^{(3)} x_{n,i}^{(5)} + \gamma_i^{(4)} x_{n,i}^{(6)} + \epsilon_{2,n,i}. \quad (3.42)$$

$(t_i, \beta_i^{(1)}, \beta_i^{(2)}, \beta_i^{(3)}, \gamma_i^{(1)}, \gamma_i^{(2)}, \gamma_i^{(3)}, \gamma_i^{(4)})$ の事前分布として正規分布を仮定し階層化した. 階層ベイズモデルの推定では 20000 回のサンプリングを行い, 最初の 10000 回をバーンイン期間として捨て, 残りのサンプルを統計量の算定に利用した.

静的モデルでは誤判別率が高く推定がうまくいかない. また階層ベイズモデルの来店を非来店と誤判別率, 非来店を来店と誤判別率, 全体の誤判別率はそれぞれ 4.23%, 19.66%, 23.89% であり, 提案手法のそれぞれの誤判別率は 30.78%, 23.98%, 19.01% である. 全体の誤判別率から提案手法が正確に推定できていることがわかる.

同様に図 3.8 には購買を非購買, 非購買を購買, 全体における誤判別率の分布を示している. 購買を非購買と誤判別, 非購買を購買と誤判別, 全体の誤判別は提案手法ではそれぞれ 11.23%, 2.97%, 3.4%, 階層ベイズモデルでは 1.68%, 0.77%, 2.45% であり提案手法が階層ベイズモデルに比べて誤判別率では劣っている. しかし, 階層ベイズモデルで推定したパラメータ γ_i^2, γ_i^3 の平均値はそれぞれ -0.48, -0.41 である. 事前に想定した値として $\gamma_i^2, \gamma_i^3 > 0$ であるため, FSP の利用に購買されているが値引きによる効果はないとなり整合的な結果となっていない.

次に個人毎の推定結果から 3 人を抽出し, そのトレンド成分 $t_{n,i}$ の推定値の推移を図 3.9 に示す. $t_{n,i}$ は対象店舗へのロイヤリティ (忠誠心) を表している指標であると考えられ, ト

トレンド成分が減少傾向であると店舗に対するロイヤリティが低下しており、上昇傾向であるとロイヤリティが高まっていると理解できる。図 3.9 の上段の顧客 1 は検証期間を通して減少傾向にある。そのため店舗のベースとなる魅力度が低下傾向であることを表している。中段の顧客 2 は顧客 1 と反対に検証期間を通して上昇傾向であることから店舗へのロイヤリティが高まっている。下段の顧客 3 は上下の変動はあるものの期間を通してトレンド成分が大きく変動していない様子が見て取れる。

次に FSP の購買推進効果を検証するため、オッズ比 (ϕ) を計算する。オッズ比とは、対象とする変数以外を固定した場合に対象の変数の違いで、選択確率の変化を評価できる指標である。しかし、本研究で用いる FSP に関する変数は連続量であるため通常のオッズ比は使用できない。そのため、オッズ比を拡張した連続量のオッズ比を用いる。連続量のオッズ比は説明変数間の差 ($\Delta x_{n,i}^4, \Delta x_{n,i}^5$) にオッズ比 (以降では疑似オッズ比と呼ぶ) が従属し、 $\phi_n^1 = \exp(\gamma_{n,i}^2 \Delta x_{n,i}^4)$ (月内の FSP の利用可能数の影響度を表す時変係数の疑似オッズ比)、 $\phi_n^2 = \exp(\gamma_{n,i}^3 \Delta x_{n,i}^5)$ (店舗販売価格と FSP が利用可能時の価格差の影響度を表す時変係数の疑似オッズ比) で算定できる。

図 3.10 は月内の FSP 利用可能数の疑似オッズ比 ϕ_n^1 を表す。これは発行する FSP のクーポンに対する反応を示していると考えられる。つまり、クーポンの実施が有効であったかを表していると考えられる。上段の顧客 1 は初期が最大となり急激に低下しており、効果が弱まっている。中段の顧客 2 は途中に大きく反応していることがあるが、全体としては低い値を示している。顧客 3 についても顧客 1 と同様に減少傾向にある。そのため、時間の経過とともに FSP の利用可能数の与える影響は小さくなっているが顧客 1 と異なり緩やかに減衰している。

図 3.11 も同様に店舗販売価格と FSP が利用可能時の価格差の疑似オッズ比 (ϕ_n^2) を表す。これは割引に対する選択確率に与える影響であるため、 ϕ_n^2 は初期が高くなり時間と共に低下し、与える影響は弱くなると予測できる。これは毎回の購入において、FSP を利用し値引きされた金額で商品を購入していれば顧客の参照価格が低下するため、割引値に対する反応が鈍くなるためである。

本研究でも ϕ_n^2 は、大部分の顧客は図 3.11 の上段に示した顧客 1 と同様に初期に最大となり時間と共に低下することを確認した。しかし、すべての顧客が初期が最大で時間とともに低下するだけではない。検証対象顧客の中には図中の中段や下段に示すようにほとんど変動せずに一定の影響を与える顧客も存在する。これは静的な市場反応モデルでは捉えられないが、動的な市場反応モデルを用いて時変回帰係数を推定したため、得られる利点である。本研究は購買に与える影響を推定できるため、他の商品にも適用することで、効果の高い個人毎のクーポンを発行することが可能となる。

ここまではスーパーでも嗜好品のソーセージ A に焦点をあててきたが、図 3.12 には納豆 A の ϕ_n^2 の推定結果を示す。図中に表示している 3 名は他の図で提示している顧客と同一人物である。上段の顧客 1 ではソーセージ A と同様に初期において効果は高く、時間の経過とともに低下している。中段、下段の顧客 2, 3 では、値は高くないものの期間を通して一定値である、納豆 A ではソーセージ A に比べて時変係数である $\gamma_{n,i}^3$ が一定である顧客は多い。

最後にソーセージ A と納豆 A の $\phi_{n,i}^2$ の違いを見るために ϕ_n^2 の平均時間変化を図 3.13 に示す。

表 3.5: $\phi_{n,i}^2$ の統計量 (上段が平均値を表し、カッコ内が分散を表す)

	ソーセージ A	納豆 A
店舗販売価格と FSP 利用可能時の価格差のオッズ比	1.03053 (0.00058)	1.03743 (0.00042)
FSP の利用可能数のオッズ比	1.04757 (0.00073)	1.04663 (0.00066)

図 3.13 からソーセージ A および納豆 A のセールスプロモーション効果は全体として購買に与える影響は継続していると考えられる。ただしソーセージ A は前半においては納豆 A より高い値を示したが、後半は衰退が早い様子が見て取れる。推定の対象とした顧客のそれぞれの商品の購買における FSP 利用率はソーセージ A が 82.8%、納豆 A が 53.6% と高いため内的参照価格が低下したのではないかと示唆される。参照価格と値引きの回数、値引きの大きさと参照価格については清水 (2002) の報告で、値引きの回数が増えれば増えるほど参照価格が低下し、値引き額が高ければ高いほど参照価格が低下すると報告されている。本研究でも値引き回数が多く、値引き額が高いソーセージ A が長期的には価格差に対するオッズ比 (ϕ_n^2) が低く推定されており、先行研究と同様の結果を得た。

表 3.5 には ϕ_n^2 の全体での平均変化率を示した。表からもセールスプロモーションは、両商品ともに継続的にプラスの効果があると考えられるが、静的な値で施策を評価しているとソーセージ A のプロモーション効果が納豆よりも早く減衰していることに気づかない。そのため、本研究のような時間変化を伴う推定が重要である。

3.7 本章のまとめ

本研究では個人毎に異なったプロモーションである FSP が購買行動へ与える影響度を推定するために来店・購買生起を状態空間モデルの枠組みで構築し、スーパーマーケットの 1 年間の購買データを用いて検証した。来店・購買生起行動をプロモーション効果は購買生起

行動へ影響すると仮定しモデル化し、粒子フィルタで時変回帰係数の時間的な変動を推定した。その結果、セールスプロモーション効果は継続的に続くが、商品によって購買へ与える影響度の時間変化は異なることを示した。

今後の課題として、本研究で提案したモデルが実際のプロモーション活動において以下のように活用し、効果を検証する必要がある。具体的には毎月発行する FSP のプロモーションの内容を、本研究で得られた推定値を用いてプロモーション効果の推定値を用いて最適化することがあげられる。

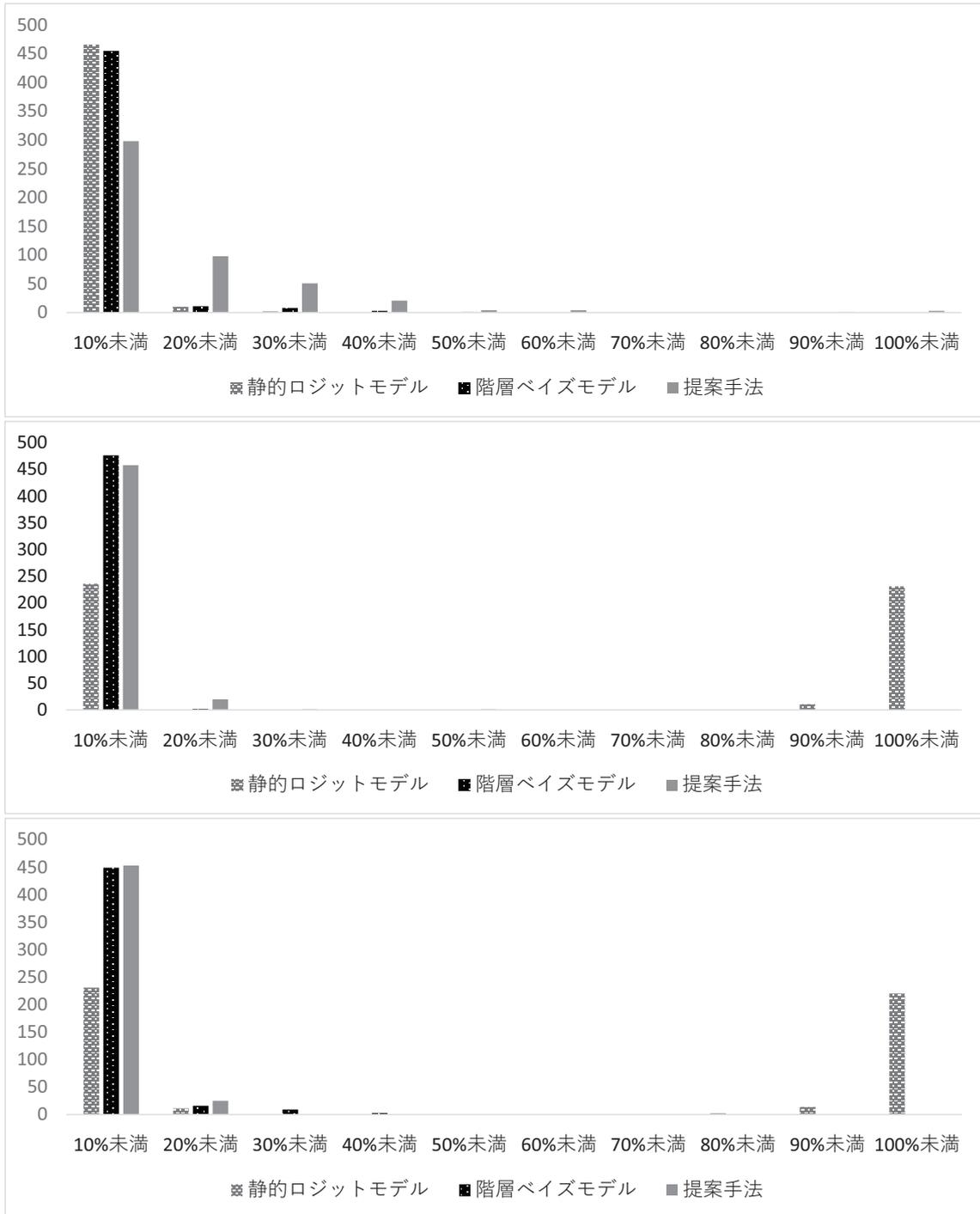


図 3.8: 購買確率の誤判別率の分布状況 [上:購買の誤判別数, 中:非購買の誤判別数, 下:全体の誤判別数]

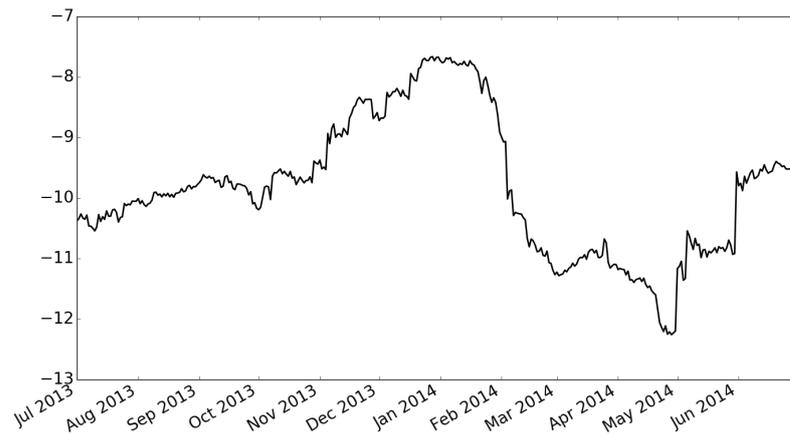
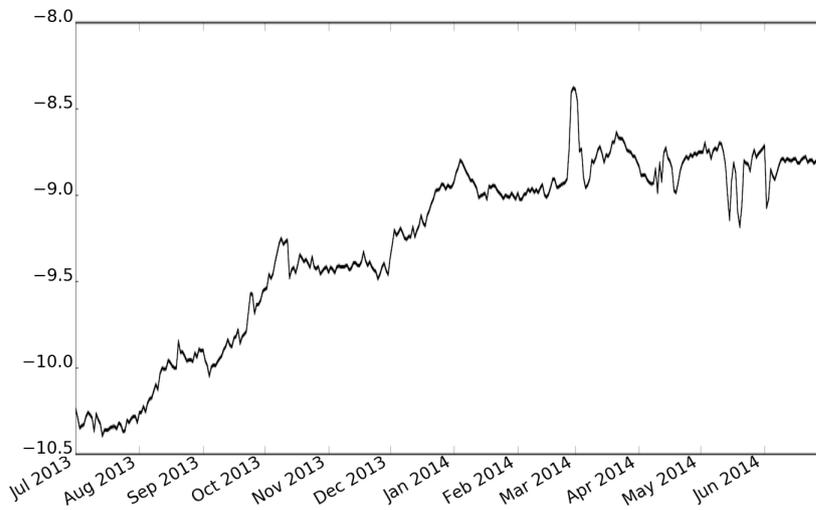
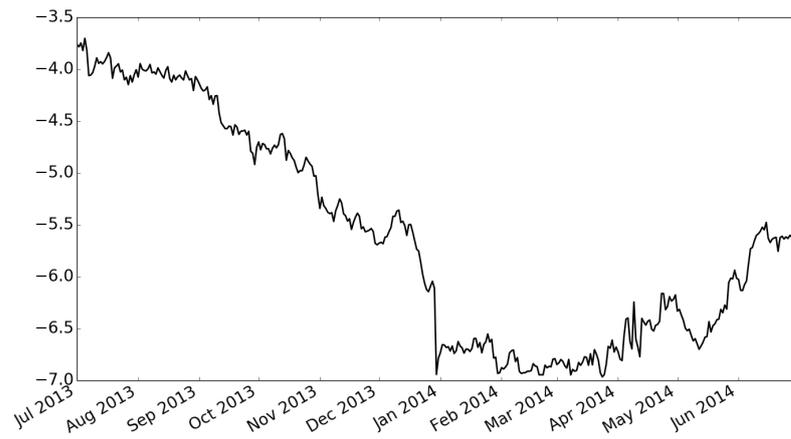


図 3.9: 来店効用のトレンド成分 (平滑化分布の推移) 上:上下の変動はあるものの検証期間中で下降傾向であるため、ロイヤリティが低下傾向にある。中:上昇傾向にあるため店舗へのロイヤリティが上昇傾向にある。下:期間中上下変動はあるものの、大きな変動はない。

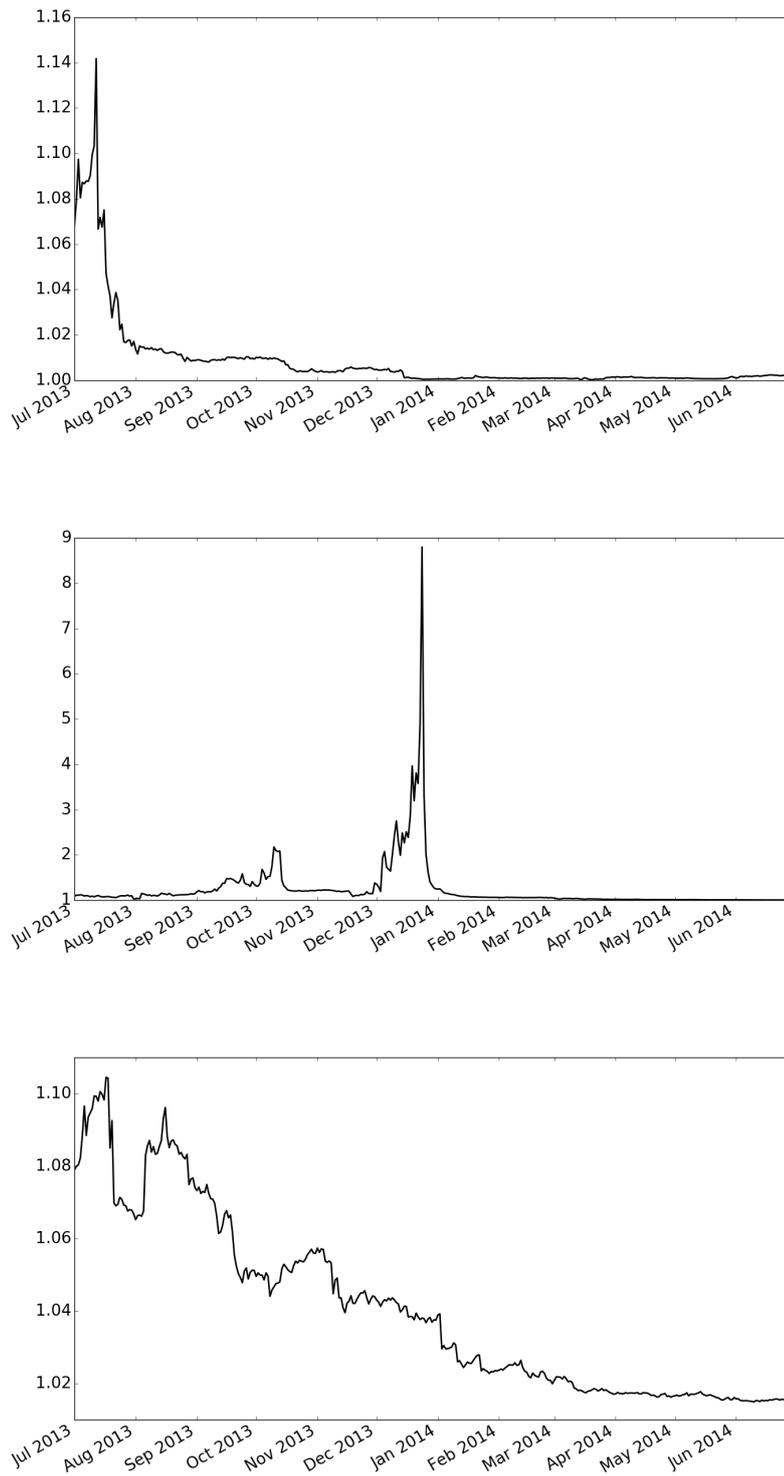


図 3.10: $\gamma_{n,i}^2$ (FSP の利用可能数) の個人毎の疑似オッズ比 ($\Delta x_{n,i}^4 \approx 10$) 上:初期が最大となり時間の経過とともに低下している, 中:強く反応している期間もあるが全体的に購買への影響は小さい, 下:緩やかに減衰している.

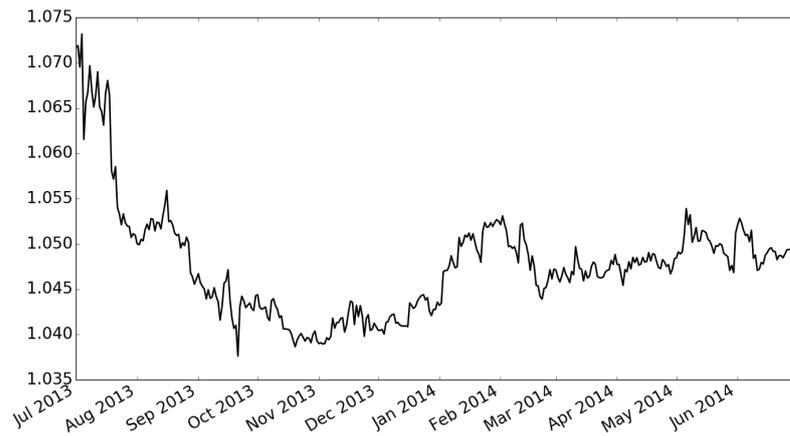
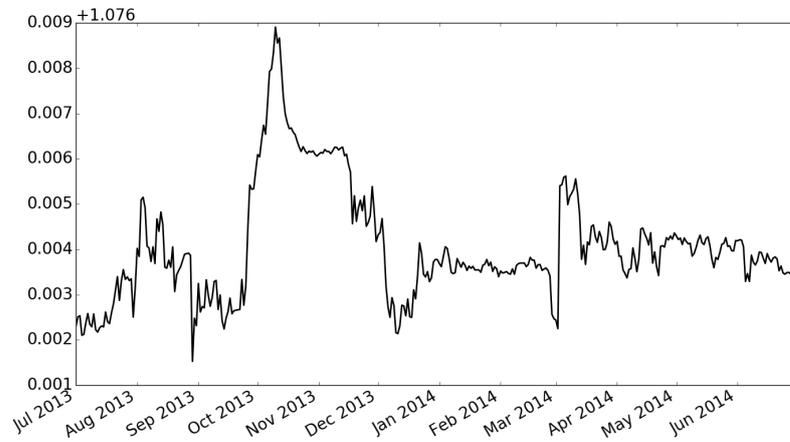
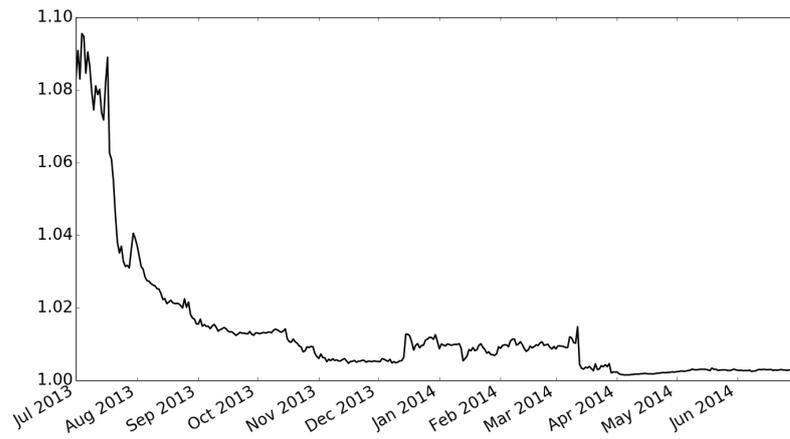


図 3.11: $\gamma_{n,i}^3$ (店舗販売価格と FSP 利用可能時の価格差)の個人毎の疑似オッズ比($\Delta x_{n,i}^5 \approx 10$)
 上:初期が最大となり, 時間の経過とともに低下している. 中, 下:期間を通してほぼ一定値である.

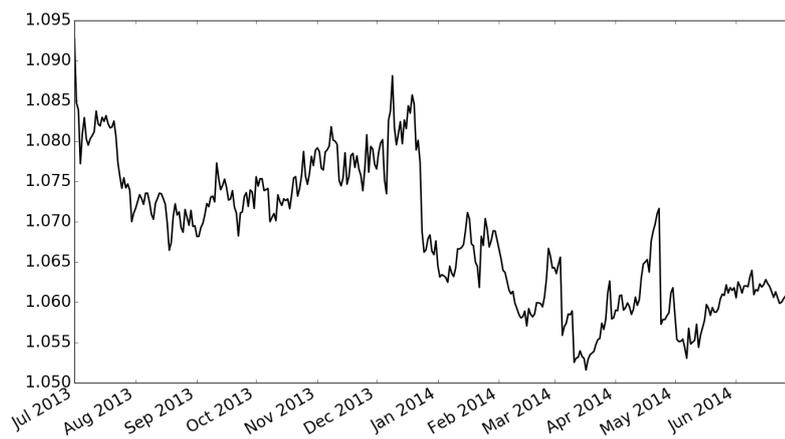
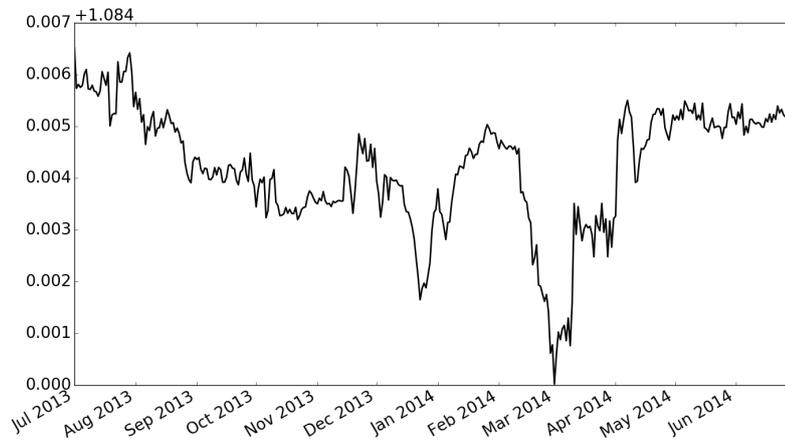
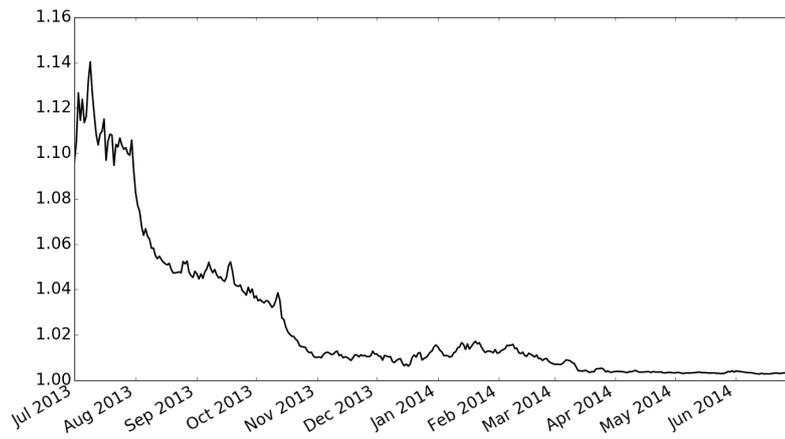


図 3.12: 納豆 A における $\gamma_{n,i}^3$ (店舗販売価格と FSP 利用可能時の価格差) の個人毎の疑似オッズ比 ($\Delta x_{n,i}^5 \approx 10$) 上:初期が最大となり時間の経過とともに低下しているが、一定値の効果を保っている中:期間を通しておおきな変動もなくほとんど一定を推移している下:全体的に低下傾向にあるが、一定値をキープしている

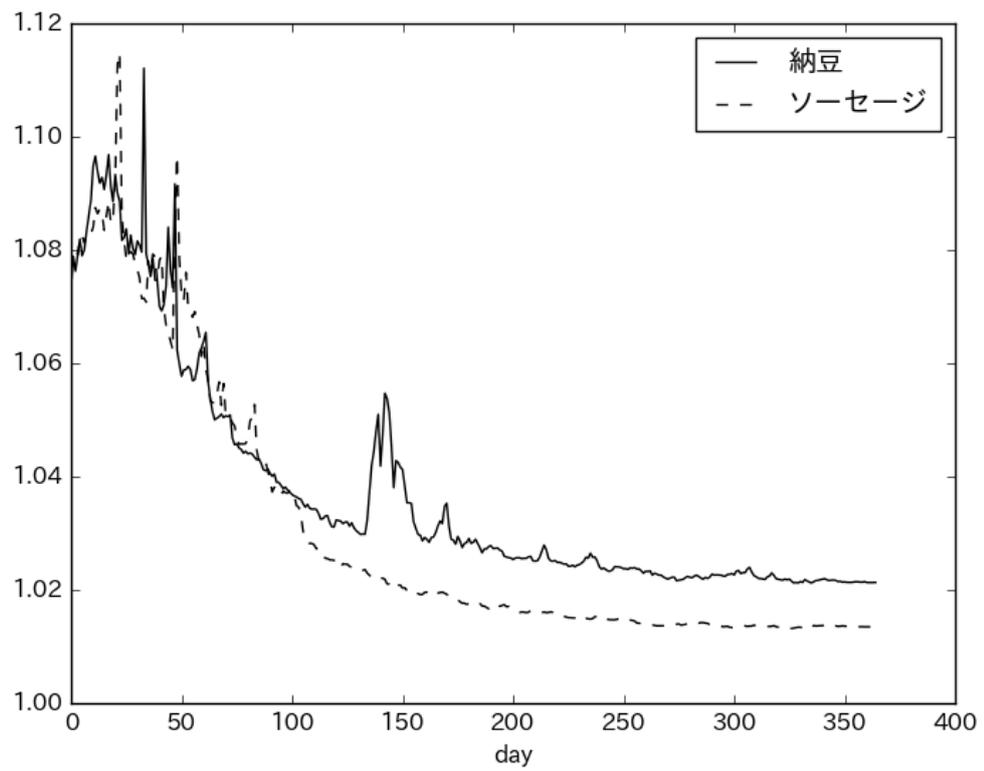


図 3.13: $\phi_{n,i}^2$ の平均時間変化 ($\Delta x_{n,i}^5 \approx 10$) . 点線:ソーセージ A, 罫線:納豆 A. 両者とも時間の経過とともに, 購買に与える影響は小さくなるが, ソーセージ A が納豆 A より減衰が早い.

第4章 購買間隔の規則性

4.1 はじめに

近年、大量のデータ（ビックデータ）が容易に蓄積可能となり、蓄積したデータを活用したマーケティング活動が積極的に行われている。その中でも特に重要とされているのは顧客関係管理 (Customer Relationship Management: CRM) であり、これはマーケティング・サイエンスにおいても重要な分野の一つである。

CRM において最終購買日 (Recency), 来店頻度 (Frequency), 購入金額 (Monetary) を用いた RFM 分析は簡素であるが現場において広く使われる有用な手法であり、マーケティング・サイエンスにおいても RFM 分析の高度化に関する様々な研究が行われている (Platzer and Reutterer (2016); 阿部 (2011); Abe (2009)) .

その一方で近年 RFM の指標に加えて、顧客の購買行動を測る新しい尺度としてクラмпネス (Clumpiness) が Zhang, Bradlow and Small (2013) によって提唱された。クラмпネスは「イベント（来店・購買）の発生間隔が均等でない度合い」と定義され、最小性（イベント発生が等間隔であれば最小となる）、最大性（イベントが集中して発生する場合は最大となる）、連続性（イベントの発生に間隔に応じて変動する）および収束性（イベントの発生間隔が短くまたは長くなるにつれて、増加または減少する）の4つの性質を有した指標である。これら4つの性質を有したクラмпネスを顧客毎の購買間隔を用いて算出可能であり、RFM と同様に計算が簡単に行えるといったメリットがある。またクラмпネスを測定することで RFM では捉えられない顧客の購買行動を識別することが可能であるとし RFM にクラмпネス (C) を加えた RFMC が今後の CRM において重要になると述べている。しかしながら Zhang, Bradlow and Small (2013) によって提唱されたクラмпネスはマーケティング現場で利用されることを想定していることから簡単な計算によって算出される指標である。そのためデータの背景に存在する情報抽出が困難である。またクラмпネスはイベントの発生間隔に着目した指標であり、これまでもイベント発生間隔に関する研究は古くから行われており、いずれの先行研究においてもイベント発生間隔に確率分布を仮定し消費者行動を分析している (Ehrenberg (1959); Gupta (1988); Jain and Vilcassim (1991); Park and Fader (2004)) . 例えば Gupta (1988) は購買間隔に Erlang-2 分布を仮定するモデルを

採用し、プロモーション効果が購買間隔へ与える影響を調べた。Moe and Fader (2004) は購買間隔に指数分布を仮定し、その指数分布のパラメータにガンマ分布を仮定した階層ベイズモデルによって消費者の異質性をモデルに組み込んでモデル化し、訪問間隔の時間的変化を捉えることが重要であると述べている。

一方クランピネスに焦点をあてた研究として Platzter and Reutterer (2016) がある。彼らの研究では購買間隔にガンマ分布を仮定し、そのガンマ分布のパラメータにもガンマ分布を仮定する Pareto/GGG モデルを提案した。Pareto/GGG モデルは Zhang, Bradlow and Small (2014) によって提案されたクランピネスの確率モデルと考えることができ、消費者の異質性を取り込んだモデルである。Pareto/GGG モデルを用いて6つのデータ・セットで検証した結果、個人の購買タイミングの規則性を推定することによって将来の行動を予測することが可能となると提案している。しかし Platzter and Reutterer (2016) が提案したモデルはクランピネスの確率モデルであるといえるが、Moe and Fader (2004) が指摘する購買間隔の時間変動については考慮されていない。

時間変動を考慮したモデル化として状態空間モデルを用いた方法は精力的に行われており、集計データに対する適用例として青柳・佐藤 (2015)、本橋・樋口 (2013) による報告がある。また状態空間モデルを個人レベルに適用した例も報告されている (佐藤・樋口 (2008); 奥野・中村 (2016))。特に個人レベルに適用した例はイベントの生起行動に着目して、チラシやクーポンのマーケティング施策がイベント生起へ与える影響を推定することを目的としている。

本研究は RFMC の C に着目して個人ごとのクランピネスの時間変動を推定し、顧客の購買特性 (購買パターン) を明らかにすることが目的である。具体的には顧客の購買履歴から購買発生率と購買不規則性の時間変化を推定する。ここで購買発生率とは購買の発生頻度を表し、購買不規則性とは購買発生間隔のばらつき具合 (クランピネスに対応する) を表す。モデル化は購買の発生を点過程として捉え、購買発生間隔の分布にガンマ分布を仮定し、ガンマ分布のパラメータに事前分布を導入することで状態空間モデルの枠組みで行う。

4.2 ポアソン過程

点過程において最もシンプルなモデルであるポアソン過程について示す。ポアソン過程では、十分小さい時間幅 Δt において時刻 t から時刻 $t + \Delta t$ までに来店/購買の発生する自覚率が、時刻 t での発生率 $\lambda(t)$ と時間幅の積である $\lambda(t)\Delta t$ で与えられ、イベントの発生は発生率にのみ依存し、各時刻において独立である。

ポアソン過程では、発生率の時間変化の関数 $\{\lambda(t)\}$ が与えられたとき、イベント列 $\{t_i\}$

が発生する確率を考える。時刻 $[0, T]$ を十分小さい時間幅 Δt で等間隔に M 個の区間に分割する。ここで j 番目の区間の左端における時刻を t_j とする。

$$P(\{u_i\} | \{\lambda(t_j)\}) = \prod_{j \in \{u_i\}} [\lambda(t_j)\Delta t] \prod_{j \notin \{u_i\}} [1 - \lambda(t_j)\Delta t], \quad (4.1)$$

$$= \prod_{j \in \{u_i\}} \frac{\lambda(t_j)\Delta t}{1 - \lambda(t_j)\Delta t} \prod_{j=1}^M [1 - \lambda(t)\Delta t] \quad (4.2)$$

ここで時間幅 $\Delta t \rightarrow 0$ とすると、右辺第 1 因子は $[\prod_{j=1}^n \lambda(t_j)]\Delta t^n$ となる。また右辺第 2 因子は、

$$\prod_{j=1}^M [1 - \lambda(t)\Delta t] = \exp\left(\sum_{j=1}^M \log(1 - \lambda(t_j)\Delta t)\right), \quad (4.3)$$

$$= \exp\left(\sum_{j=1}^M \log(-\lambda(t_j)\Delta t + 0(\Delta t^2))\right), \quad (4.4)$$

$$\rightarrow \exp\left(\int_0^T \lambda(t)dt\right), \quad (4.5)$$

となる。またイベントの発生は独立であるから、イベント間隔における発生確率は以下のようになる、

$$p(\{t_j\} | \{\lambda(t)\}) = \left(\prod_{j=1}^n \lambda(t_j)\right) \exp\left(\int_0^T \lambda(t)dt\right). \quad (4.6)$$

ただし時間をイベント発生率に応じてリスケールすると、

$$\Lambda(t) \equiv \int_0^t \lambda(u)du, \quad (4.7)$$

となりリスケールされたイベント間隔 $\tau_j \equiv \Lambda(t_j - \Lambda(t_{j-1}))$ の確率分布は指数分布となる、

$$g(\tau_j)d\tau_j = p(t_j | t_{j-1}; \{\lambda(t)\})dt_j = \exp(-\tau_j)d\tau_j. \quad (4.8)$$

4.3 モデル化

本節では顧客の購買行動をモデル化するために購買間隔をモデル化し推定手法を説明する。

4.3.1 購買間隔のモデル化

購買発生の離散時間時系列データ $\{t_1^{(j)}, t_2^{(j)}, \dots, t_{n_j}^{(j)}\}$ が与えられたもと購買の発生率と購買の不規則性を推定する問題を考える。ここで j が顧客、 n_j が顧客 j の購買数および

$t_i^{(j)} (i = 1, \dots, n_j)$ が顧客 j の i 回目の購買時刻である。はじめに推定のため購買間隔 $T_i^{(j)} = t_{i+1}^{(j)} - t_i^{(j)} (i = 1, 2, \dots, n_j - 1)$ の生成分布を導入する。購買間隔の生成分布はこれまでの先行研究と同様にある確率分布から生成されると仮定しモデル化する。本研究では購買間隔は生成分布 $p(T_i^{(j)} | \lambda^{(j)}(t_i), \kappa^{(j)}(t_i))$ から生成されると仮定する。ここで $\lambda^{(j)}(t_i), \kappa^{(j)}(t_i)$ はそれぞれ顧客 j の i 番目の購買間隔 $T_i^{(j)}$ におけるパラメータであり、購買発生率と購買不規則性と定義する。つまり購買発生間隔は発生率 $\{\lambda^{(j)}(t)\}$ と、購買不規則性 $\{\kappa^{(j)}(t)\}$ を持つ確率過程から生成されるとする。つぎに購買発生間隔の生成分布 $p(T_i^{(j)} | \lambda^{(j)}(t_i), \kappa^{(j)}(t_i))$ を決定する。生成分布は Platzer and Reutterer (2016) と同様にガンマ分布を採用し、

$$p(T_i^{(j)} | \lambda^{(j)}(t_i), \kappa^{(j)}(t_i)) = \frac{1}{\Gamma(\kappa^{(j)}(t_i))} \left(\lambda^{(j)}(t_i) \right)^{\kappa^{(j)}(t_i)} \quad (4.9)$$

$$\times \left(\kappa^{(j)}(t_i) \right)^{\kappa^{(j)}(t_i)} \left(T_i^{(j)} \right)^{\kappa^{(j)}(t_i) - 1} \exp \left(-\lambda^{(j)}(t_i) \kappa^{(j)}(t_i) T_i^{(j)} \right)$$

と定義する。ここで $\Gamma(\kappa^{(j)}(t_i))$ はガンマ関数である。式 (4.9) の $\kappa^{(j)}(t_i)$ が大きいときに規則的な購買を表し、 $\kappa^{(j)}(t_i)$ が小さいときに不規則的な購買を表す。とくに $\kappa^{(j)}(t_i) = 1$ のとき、ポアソン分布となりランダム購買となる (図 4.1)。

購買間隔の生成分布をモデル化したので購買の発生確率を考える。顧客 j の時刻 $t_i^{(j)}$ に購買が発生する確率は、各時間ごとに独立であると仮定し以下のように与えられるとする、

$$p(\{t_i^{(j)}\} | \{\lambda^{(j)}(t)\}, \{\kappa^{(j)}(t)\}) = \prod_{i=1}^{n_j-1} p(T_i^{(j)} | \lambda^{(j)}(t_i^{(j)}), \kappa^{(j)}(t_i^{(j)})). \quad (4.10)$$

4.3.2 推定方法

前節にて購買間隔をモデル化したので、 $\lambda^{(j)}(t), \kappa^{(j)}(t)$ の時間変動を推定することを考える。すなわち式 (4.10) の条件付き確率をベイズの定理を用いて反転させる、

$$p\left(\{\lambda^{(j)}(t)\}, \{\kappa^{(j)}(t)\} \mid \{t_i^{(j)}\}; \gamma_\lambda^{(j)} \gamma_\kappa^{(j)}\right) = \frac{p\left(\{t_i^{(j)}\} \mid \{\lambda^{(j)}(t)\}, \{\kappa^{(j)}(t)\}\right) p\left(\{\lambda^{(j)}(t)\}; \gamma_\lambda^{(j)}\right) p\left(\{\kappa^{(j)}(t)\}; \gamma_\kappa^{(j)}\right)}{p\left(\{t_i^{(j)}\}; \gamma_\lambda^{(j)} \gamma_\kappa^{(j)}\right)} \quad (4.11)$$

式 (4.11) から $\lambda^{(j)}(t), \kappa^{(j)}(t)$ を推定するためには購買発生率と購買規則性に事前分布をモデル化する必要がある。そこで $\lambda^{(j)}(t), \kappa^{(j)}(t)$ の事前分布としてガウス過程を導入する。これは $\lambda^{(j)}(t), \kappa^{(j)}(t)$ が直前の値と大きく変動しないことを仮定しており、大きな変動に対してオーバーフィッティングを防ぐことと計算可能性から選定した:

$$p\left(\{\lambda^{(j)}(t)\}; \gamma_\lambda^{(j)}\right) = \frac{1}{Z\left(\gamma_\lambda^{(j)}\right)} \exp\left[-\frac{1}{2\left(\gamma_\lambda^{(j)}\right)^2} \int_0^{T^{(j)}} \left(\frac{d\lambda^{(j)}(t)}{dt}\right)^2 dt\right], \quad (4.12)$$

$$p\left(\{\kappa^{(j)}(t)\}; \gamma_\kappa^{(j)}\right) = \frac{1}{Z\left(\gamma_\kappa^{(j)}\right)} \exp\left[-\frac{1}{2\left(\gamma_\kappa^{(j)}\right)^2} \int_0^{T^{(j)}} \left(\frac{d\kappa^{(j)}(t)}{dt}\right)^2 dt\right]. \quad (4.13)$$

ここで $\gamma_\lambda^{(j)}, \gamma_\kappa^{(j)}$ はハイパーパラメータで、 $Z\left(\gamma_\lambda^{(j)}\right), Z\left(\gamma_\kappa^{(j)}\right)$ は規格化定数を表す (Rasmussen and Williams (2006))。ハイパーパラメータの決定には式 (4.14) の周辺尤度を最大にすることで最適な値を EM アルゴリズムによって求める。

$$\begin{aligned} p\left(\{t_i^{(j)}\} \mid \gamma_\lambda^{(j)}, \gamma_\kappa^{(j)}\right) &= \int \int p\left(\{t_i^{(j)}\} \mid \{\lambda^{(j)}(t)\}, \{\kappa^{(j)}(t)\}\right) \\ &\times p\left(\{\lambda^{(j)}(t)\}; \gamma_\lambda^{(j)}\right) p\left(\{\kappa^{(j)}(t)\}; \gamma_\kappa^{(j)}\right) d\{\lambda^{(j)}(t)\} d\{\kappa^{(j)}(t)\} \end{aligned} \quad (4.14)$$

ハイパーパラメータ決定後に事後分布である式 (4.15) を最大化するような $\lambda^{(j)}(t), \kappa^{(j)}(t)$ を推定する。

$$\begin{aligned} p\left(\{\lambda^{(j)}(t)\}, \{\kappa^{(j)}(t)\} \mid \{t_i^{(j)}\}; \gamma_\lambda^{(j)} \gamma_\kappa^{(j)}\right) &\propto p\left(\{t_i^{(j)}\} \mid \{\lambda^{(j)}(t)\}, \{\kappa^{(j)}(t)\}\right) \\ &\times p\left(\{\lambda^{(j)}(t)\}; \gamma_\lambda^{(j)}\right) p\left(\{\kappa^{(j)}(t)\}; \gamma_\kappa^{(j)}\right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

4.3.3 状態空間モデルによる表現

前節までに示した購買間隔のモデルは非線形ガウス型状態空間モデルによって表現することができ、時変回帰係数の推定は状態空間モデルにおける状態を推定する問題として定式化できる (Shimokawa and Shinomoto (2009))。状態空間モデルは観測モデルとシステムモデルから定式化され、データの観測される定式化を記述するモデルを観測モデル、時変回帰係数の時間発展の定式化を記述するモデルをシステムモデルと呼ぶ。本モデルでは、観測

モデルを式 (4.9) とし, 式 (4.12), (4.13) からシステムモデルは

$$p\left(\lambda_{i+1}^{(j)} \mid \lambda_i^{(j)}; \gamma_\lambda^{(j)}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \left(\gamma_\lambda^{(j)}\right)^2 T_i^{(j)}}} \exp\left[-\frac{\left(\lambda_{i+1}^{(j)} - \lambda_i^{(j)}\right)^2}{2 \left(\gamma_\lambda^{(j)}\right)^2 T_i^{(j)}}\right] \quad (4.16)$$

$$p\left(\kappa_{i+1}^{(j)} \mid \kappa_i^{(j)}; \gamma_\kappa^{(j)}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \left(\gamma_\kappa^{(j)}\right)^2 T_i^{(j)}}} \exp\left[-\frac{\left(\kappa_{i+1}^{(j)} - \kappa_i^{(j)}\right)^2}{2 \left(\gamma_\kappa^{(j)}\right)^2 T_i^{(j)}}\right]. \quad (4.17)$$

もしくは

$$p\left(\boldsymbol{\theta}_{i+1}^{(j)} \mid \boldsymbol{\theta}_i^{(j)}; \boldsymbol{\gamma}^{(j)}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi |\mathbf{Q}_i^{(j)}|}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\boldsymbol{\theta}_{i+1}^{(j)} - \boldsymbol{\theta}_i^{(j)}\right)^\top \left(\mathbf{Q}_i^{(j)}\right)^{-1} \left(\boldsymbol{\theta}_{i+1}^{(j)} - \boldsymbol{\theta}_i^{(j)}\right)\right]$$

$$\mathbf{Q}_i^{(j)} = \begin{pmatrix} \left(\gamma_\lambda^{(j)}\right)^2 T_i^{(j)} & 0 \\ 0 & \left(\gamma_\kappa^{(j)}\right)^2 T_i^{(j)} \end{pmatrix}$$

と表され

$$\boldsymbol{\theta}_{i+1}^{(j)} = \boldsymbol{\theta}_i^{(j)} + \mathbf{w}_i^{(j)},$$

と記述することができる (Shimokawa and Shinomoto (2009); Koyama, Shimokawa and Shinomoto (2007)). ただし $\boldsymbol{\theta}_i^{(j)} = \left(\lambda_i^{(j)}, \kappa_i^{(j)}\right)^\top$, $\boldsymbol{\gamma}^{(j)} = \left(\gamma_\lambda^{(j)}, \gamma_\kappa^{(j)}\right)^\top$ および $\mathbf{w}_i^{(j)}$ は平均 0, 分散共分散行列 $\mathbf{Q}_i^{(j)}$ のガウス分布に従う.

状態ベクトルおよびパラメータ推定構築した状態空間モデルの状態推定方法は観測モデルが非ガウス型であるため推定には非線形カルマンフィルタを用いる.

4.4 実データへの適用

推定に利用したデータ概要について 4.4.1 節で述べ, そのあとに 4.3 節にて示したモデルを用いて推定した結果について示す.

4.4.1 データ概要

本研究では経営科学系研究部会連合協議会主催, 平成 28 年度データ解析コンペティションで提供されたデータを利用した. データ期間は 2015 年 4 月 1 日から 2016 年 3 月 31 日の 1 年間であり, ファッション系 EC サイト 1 店舗における顧客の購買履歴を使用した. 分析対象は図 4.2 に示すように購買数の上位 5 カテゴリが全購買数の 8 割近くを占めているためトップ 5 のカテゴリのみを対象とした. また各カテゴリの全顧客を対象にせず各カテゴリ

購買数の上位10%の顧客を分析対象とし、各カテゴリの分析対象者数は表4.1に示すとおりである。分析対象を上位10%に絞った理由は、 $\lambda_i^{(j)}, \kappa_i^{(j)}$ を個人毎・カテゴリ毎に推定するため全顧客を分析対象とするとを相応のマシンリソースが必要となる。また購買金額ではなく購買数の上位10%の顧客を選定しているのは本研究の目的がRFMCのC（クランピネス）に焦点を当てているため購買頻度が高い顧客を対象とした。そのため分析対象を絞ったのは計算時間の都合上の問題であり、推定に必須の制約ではない。

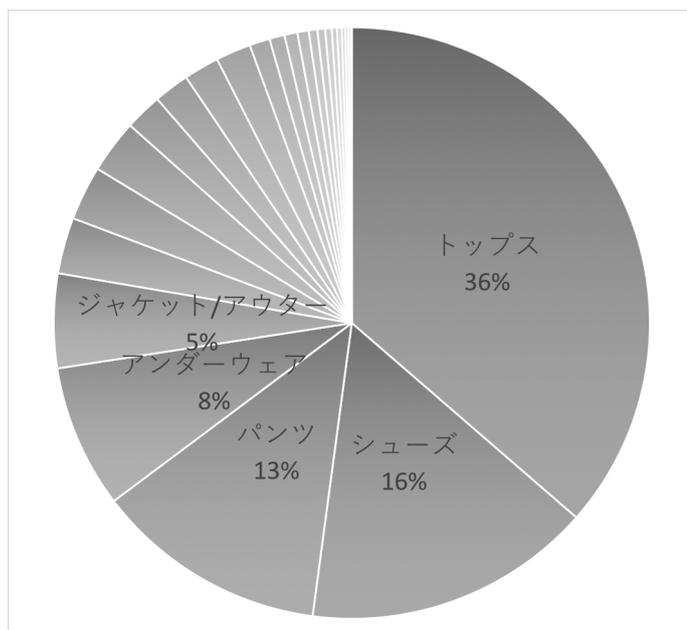


図 4.2: 購買カテゴリの割合。トップス・シューズ・パンツ・アンダーウェアおよびジャケットの上位5カテゴリで全販売数の80%程度を占めている。

表 4.1: カテゴリ毎の分析対象者数

カテゴリ	全購買数	分析対象者
トップス	1,631,630	653
シューズ	702,405	617
パンツ	564,993	423
アンダーウェア	350,731	181
ジャケット/アウター	230,984	487

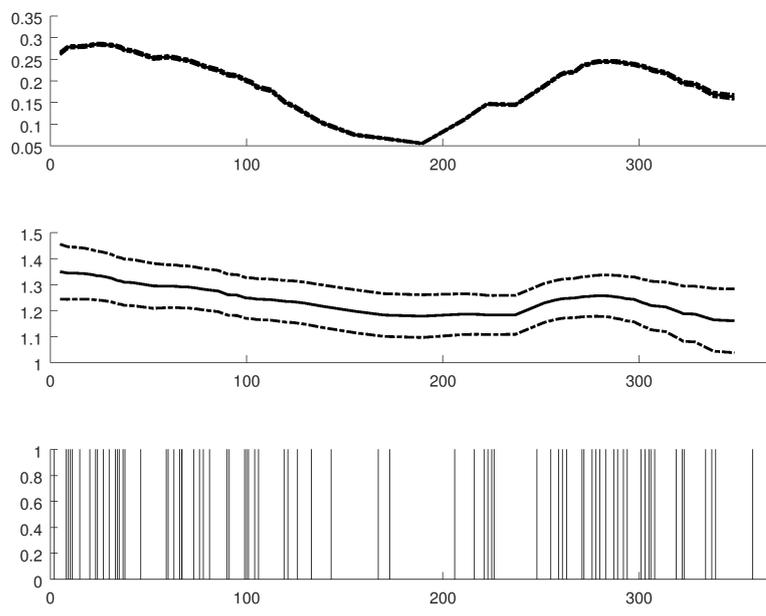


図 4.3: 推定結果. 線が推定値の平均値を表し, 点線が分散を表す. 上: 中盤で購買頻度が低下し購買発生率が大きく低下している. 後半に上昇するも全体的に減少傾向であるため購買頻度が低下している. 中: 全体的に減少傾向であるため購買間隔が広がってきている. 下: 推定に用いた入力データ. スパイクが立っている位置が購買発生日を表す.

表 4.2: ハイパーパラメータ γ のカテゴリごとの推定値の平均値と分散. いづれの値も小さく安定した推定値が得られている.

カテゴリ	$\bar{\gamma}_\lambda$	$\bar{\gamma}_\kappa$
トップス	0.0047	0.0318
シューズ	0.0016	0.0199
パンツ	0.0025	0.0242
アンダーウェア	0.0013	0.0170
ジャケット/アウター	0.0032	0.0259

4.4.2 推定結果

本節では4.3章にて構築したモデルを4.4.1節のデータ（トップス）を利用して推定した結果の一例を図4.3に示す。横軸はデータ提供開始期間（2015年4月1日）からの日数を表しており、上・中段は購買発生率 $\lambda_i^{(j)}$ 、購買規則性 $\kappa_i^{(j)}$ であり実線が推定値の平均値、破線が分散を表している。図4.3から安定した推定値が得られていることが確認できる。全顧客についても安定した推定ができており、推定したハイパーパラメータ $\gamma^{(j)}$ の平均値 $\bar{\gamma} = \sum_{j=1}^{J_c} \gamma^{(j)} / J_c$ は表4.2に示すとおりであり十分小さな値が得られている。ここで J_c は各カテゴリの分析対象者数であり具体的な数値は表4.1の右端の値を示す。また下段は推定に用いた入力データで、スパイクが立っているところに購買があったことを表す。購買発生率 $\lambda_i^{(j)}$ は購買の起こりやすさを表す指標であり上昇傾向であれば購買意欲が高く再購買が期待され、下降傾向であれば再購買の意欲が低下していると理解できる。ただし購買発生率は確率ではないため注意が必要である。図4.3の上段に示すとおり、本顧客の購買発生率は前半と後半部分が高くなり、中盤が落ち込んでいる。図中の下段の購買状況からも中盤付近では購買頻度が減少している様子が見て取れる。また図4.4に推定に利用したカテゴリデータの月別販売数を示す。縦軸は月ごとの購買数（縦軸はサイトの規模等が特定されてしまうため割合）を表す。図4.4からわかるとおり図4.3の顧客はカテゴリの売上と連動した形で購買発生率が高くなっている。購買数が高くなる月をみると7月と1月がピークとなっており、ファッション系ECサイトにおいてセールが実施されたのではないかと推測できる。このような検証は状態空間モデルを利用し動的な変動を推定することでデータに含まれていない知見が獲得可能となる一例である。

購買規則性 $\kappa_i^{(j)}$ は購買の規則性を表す指標であり、高い値を示すと購買間隔がある程度一定となる購買パターン（定期購買）を表し、低い値ではいわゆる「マイブーム」等の短い期間で固まった購買パターンを表す（図4.1）。図4.3の中段に示す購買規則性の推定値は前半緩やかな減少し、後半一時的に上昇するがその後すぐに減少傾向である。また全体的減少傾向であることから購買頻度が徐々に低下している様子が見て取れる。一人ひとりの結果をみることで同様の考察が可能となるが、本誌では紙面の都合上、詳細は顧客1名の結果を示すに留める。つぎにカテゴリ毎・顧客毎の推定値を図4.5に示す。図中の横軸は式(4.18)に示す顧客 j の購買発生率の推定値 $\lambda_i^{(j)}$ の時間軸方向の平均値 $\bar{\lambda}^{(j)}$ 、縦軸は同様に式(4.19)に示す購買規則性の推定値 $\kappa_i^{(j)}$ の時間軸方向の平均値 $\bar{\kappa}^{(j)}$ を表す。

$$\bar{\lambda}^{(j)} = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} \lambda_i^{(j)}}{n_j} \quad (4.18)$$

$$\bar{\kappa}^{(j)} = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} \kappa_i^{(j)}}{n_j} \quad (4.19)$$

図中の灰色の線で囲まれた部分は購買規則性が高く定期的な購買（本論文では $k \geq 3$ を定期購買顧客と定義する）が見込まれる顧客群である。利用頻度が高いアンダーウェアが多く存在し定期的な購買発生が見込まれることも納得がいく結果である。ただしこれらの顧客は購買発生率が低いため直近購買や購買頻度を評価する方法では優良顧客として扱われないことがある。しかし年間の売上のベースラインの確保という意味では重要な顧客である。また点線で囲んだ顧客は、購買頻度が高いかつ購買が発生しやすい（直近に購買が発生しやすい）顧客である。つまり購買発生率 $\bar{\lambda}_i^{(j)}$ が大きい値の顧客は次回購買が期待される顧客であり、そのカテゴリにおける優良な顧客であると考えられる。そのため継続的にケアをして顧客の離脱を防ぐことが重要であると言える。図 4.6-4.10 は図 4.5 をカテゴリごとに分解した図である。図 4.6 はトップスの推定値であり、購買回数が他カテゴリよりも圧倒的に多いため購買の発生率が高い顧客が多く存在する。図 4.6 はシューズの推定値であり、トップスと比較して定期購買層が多いことが確認できる。シューズは季節毎に大きく変化するため定期的な購買が多いと考えられる。図 4.6 はパンツの推定値であり、パンツは年間を通して利用できるアイテムであることから購買回数が多い顧客が少なくない。そのため、 $\bar{\lambda}^{(j)}$ が大きな顧客が多いと考えられる。図 4.6 はアンダーウェアの推定値であり、シューズと同様に定期的な購買顧客が多い。他カテゴリに比べて同じ商品の利用回数が多いと想像されるため定期的な購買が発生していると考えられる図 4.6 はジャケット/アウターの推定値であり、寒い時期に購買が多いと予想したが、定期的な購買が発生している顧客の存在が確認できる。また全体から見れば販売数は少ないが高頻度で購入する顧客と定期的な購買が発生する顧客が入り交じったカテゴリであると図から読み取れる。

図 4.11 はカテゴリごとの購買規則性を箱ひげ図で示したものである。図から分かる通りカテゴリ間での中央値に大きな違いはない。これは多くの顧客がランダムな購買が発生していることを示している反面、各カテゴリにおいて定期的に購買が発生している顧客の存在も確認できる。

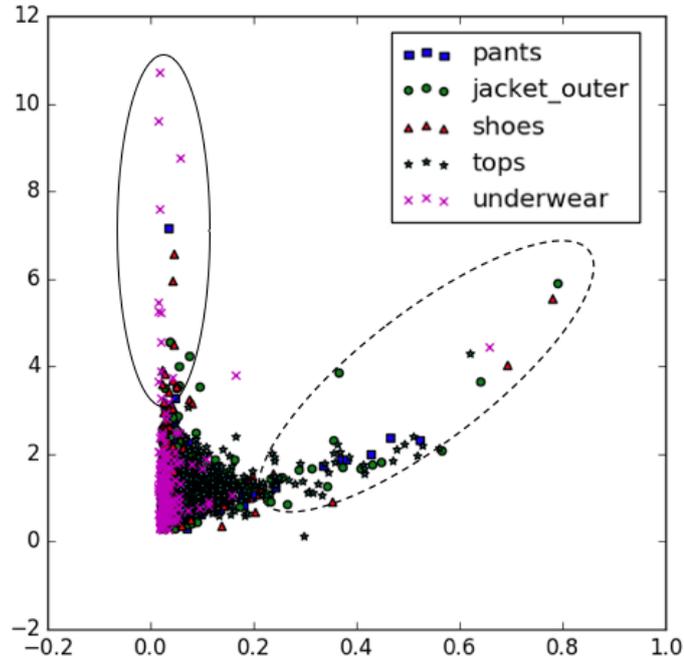


図 4.5: 全カテゴリ・全顧客の推定値 $\bar{\theta}^{(j)} = (\bar{\lambda}^{(j)}, \bar{\kappa}^{(j)})^T$ の散布図。1つの点が1人の顧客に対応しており、横軸：購買発生率、縦軸：購買規則性を表す。左側の線で囲んだ部分は $\bar{\kappa}^{(j)}$ が大きいことから定期購買顧客である。定期購買されているカテゴリとしてアンダーウェアが多い。点線で囲んだ顧客は直近購買と購買発生回数が多い顧客であり分析対象者における優良顧客と考えられる。

4.4.3 一期先予測による評価

本節では本手法と平均購買間隔による手法による一期先予測にて性能を比較し評価する。ここで平均購買間隔による手法とは顧客 j の第 $t_i^{(j)}$ 日までの購買履歴から平均購買間隔を算出し、次回の購買日 $\tilde{t}_{i+1}^{(j)} = t_i^{(j)} + \sum_{k=1}^i T_k^{(j)} / i$ を予測する。ゆえに顧客ごとに $\{\tilde{t}_3^{(j)}, \dots, \tilde{t}_{n_j}^{(j)}\}$ の購買日を予測する。同様に本手法による一期先予測も顧客 j の i 回目の購買日 $t_i^{(j)}$ までのデータを利用した推定値から次回の購買日 $\tilde{t}_{i+1}^{(j)}$ を予測する (図 4.12)。

各手法の一期先予測の評価指標として予測値 $\tilde{t}_{i+1}^{(j)}$ と実際の購買日 $t_{i+1}^{(j)}$ の差分が M 日以内であるかを評価した。予測誤差が M 日以内である割合を正解率とし、各カテゴリ・各個人

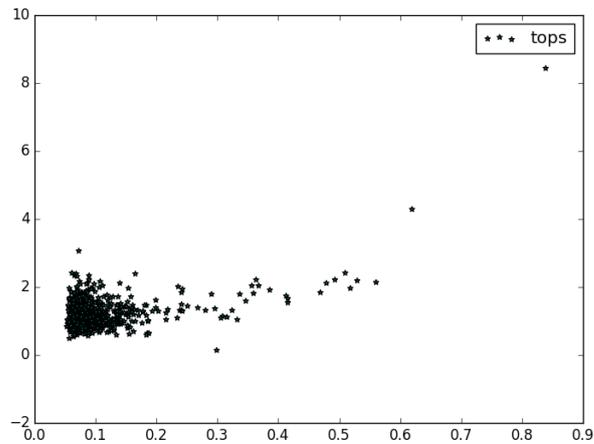


図 4.6: トップスにおける推定値 $\bar{\theta}^{(j)}$ の散布図. 1つの点が1人の顧客に対応しており, 横軸: 購買発生率の平均値 $\bar{\lambda}^{(j)}$, 縦軸: 購買規則性の平均値 $\bar{\kappa}^{(j)}$ を表す. 表 4.1 からわかるとおり購買回数が他カテゴリよりも圧倒的に多いため購買の発生率が高い顧客が多く存在する.

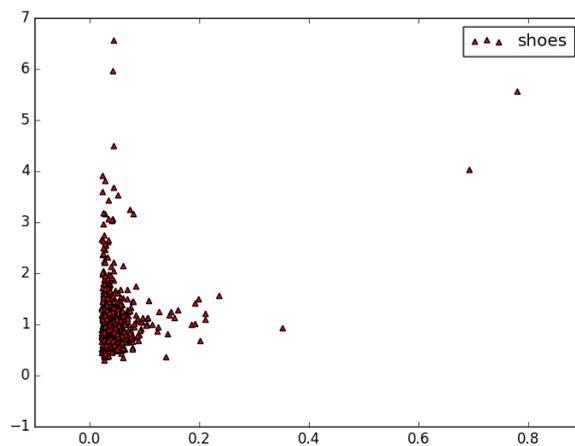


図 4.7: シューズにおける推定値 $\bar{\theta}^{(j)}$ の散布図. 1つの点が1人の顧客に対応しており, 横軸: 購買発生率の平均値 $\bar{\lambda}^{(j)}$, 縦軸: 購買規則性の平均値 $\bar{\kappa}^{(j)}$ を表す. トップスと比較して定期購買層が多いことが確認できる. シューズは季節毎に大きく変化するため定期的な購買が多いと考えられる.

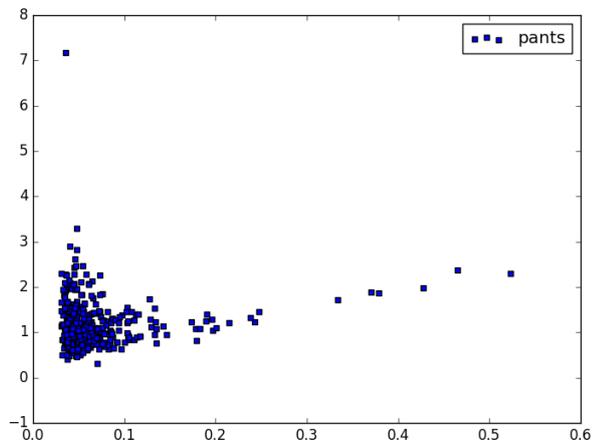


図 4.8: パンツにおける推定値 $\bar{\theta}^{(j)}$ の散布図. 1つの点が1人の顧客に対応しており, 横軸: 購買発生率の平均値 $\bar{\lambda}^{(j)}$, 縦軸: 購買規則性の平均値 $\bar{\kappa}^{(j)}$ を表す. パンツは年間を通して利用できるアイテムであることから購買頻度が高く $\bar{\lambda}^{(j)}$ が大きいと考えられる.

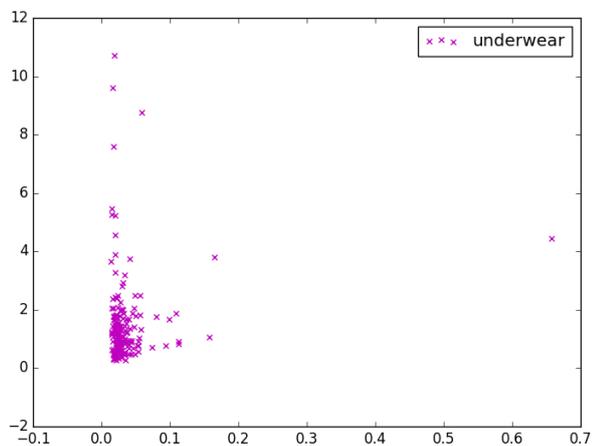


図 4.9: アンダーウェアにおける推定値 $\bar{\theta}^{(j)}$ の散布図. 1つの点が1人の顧客に対応しており, 横軸: 購買発生率の平均値 $\bar{\lambda}^{(j)}$, 縦軸: 購買規則性の平均値 $\bar{\kappa}^{(j)}$ を表す. シューズと同様に定期的な購買顧客が多い. 他カテゴリに比べて同じ商品の利用回数が多いと想像されるため定期的な購買が発生していると考えられる.

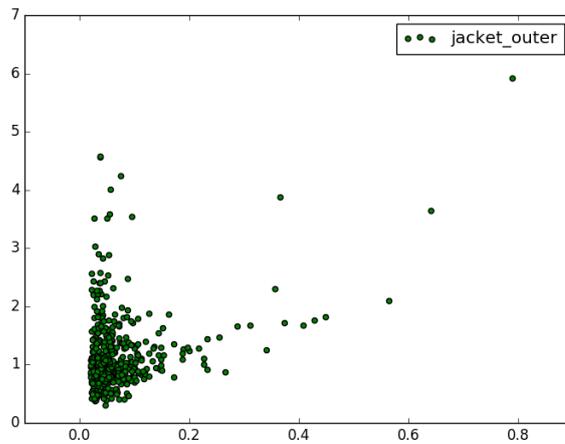


図 4.10: ジャケット・アウターにおける推定値 $\bar{\theta}^{(j)}$ の散布図。1つの点が1人の顧客に対応しており、横軸：購買発生率の平均値 $\bar{\lambda}^{(j)}$ 、縦軸：購買規則性の平均値 $\bar{r}^{(j)}$ を表す。ジャケット・アウターは寒い時期に購買が多いと予想したが、定期的な購買が発生している顧客の存在が確認できる。また全体から見れば販売数は少ないが高頻度で購入する顧客と定期的な購買が発生する顧客が入り交じったカテゴリであると図から読み取れる。

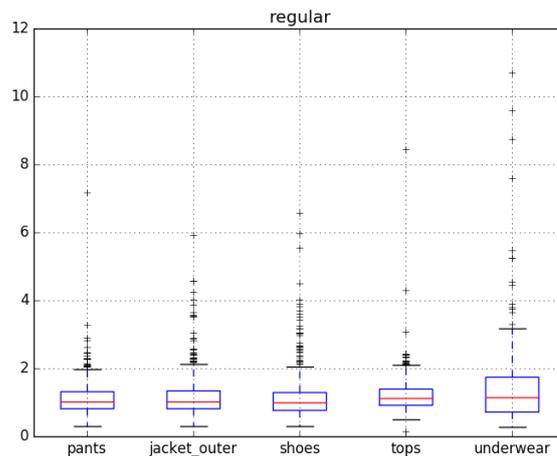


図 4.11: カテゴリ毎の購買規則性の推定値。各カテゴリにおいて定期的に購買する顧客の存在が見て取れる。

毎に算出し、一期先の予測精度として比較する。従ってカテゴリ毎の予測の正解率 RC は、

$$RC = \frac{\sum_{j=1}^{J_c} RC^{(j)}}{J_c},$$

$$RC^{(j)} = \frac{\sum_{i=3}^{n_j} I(\tilde{t}_i^{(j)}, t_i^{(j)})}{n_j},$$

ここで $RC^{(j)}$ はカテゴリにおける個人 j の正解率を表し、 n_j は顧客 j の総購買数、 J_c が全顧客数、 $\tilde{t}_i^{(j)}$ が顧客 j の一期先予測購買日および $t_i^{(j)}$ が顧客 j の第 i 回目の実測の購買日を表す。また $I(\tilde{t}_i^{(j)}, t_i^{(j)})$ を

$$I(\tilde{t}_i^{(j)}, t_i^{(j)}) = \begin{cases} 1 & |\tilde{t}_i^{(j)} - t_i^{(j)}| \leq M \\ 0 & |\tilde{t}_i^{(j)} - t_i^{(j)}| > M \end{cases}$$

と定義する。本研究では M は実務で利用することを考え $M = 7$ とした。これは実務においてマーケターが顧客へアクションが取れる主な手段は週1回程度の送付されるメルマガが多いことから妥当であると考え（メルラボ (2014)）。

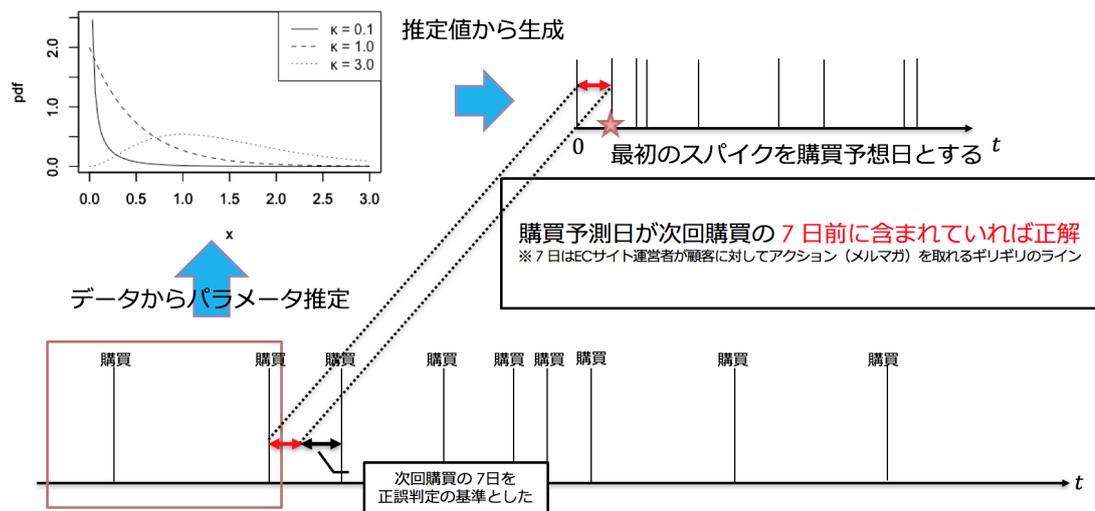


図 4.12: 評価方法の概要。 $i + 1$ 回目の購買日を i 回目までの購買データを利用して顧客毎に予測する。本手法では i 回目の購買データを用いて、 $\lambda_i^{(j)}, \kappa_i^{(j)}$ を推定し、次回購買日 $\tilde{t}_{i+1}^{(j)}$ を予測する。

図 4.13 に本手法と比較するために実務で利用されている平均購買間隔による一期先予測と比較した結果を示す。平均購買間隔による手法における RC はトップス 18.2%，シューズ 10.8%，パンツ 13.6%，アンダーウェア 14.1%，ジャケット/アウター 9.4%，全体 14.7% となった。また本手法における RC はトップス 29.5%，シューズ 18.9%，パンツ 22.9%，アンダーウェア 19.2%，ジャケット/アウター 25.3%，全体 25.6% である。全てのカテゴリに

において本手法が上回っており、全体としても 10%以上の向上していることが図から読み取れる。また $M \leq 7$ の場合における一期先の予測精度を表 4.3 に示す。いずれの M の値においても本手法が約 10%程度上回っていることが表から確認できる。

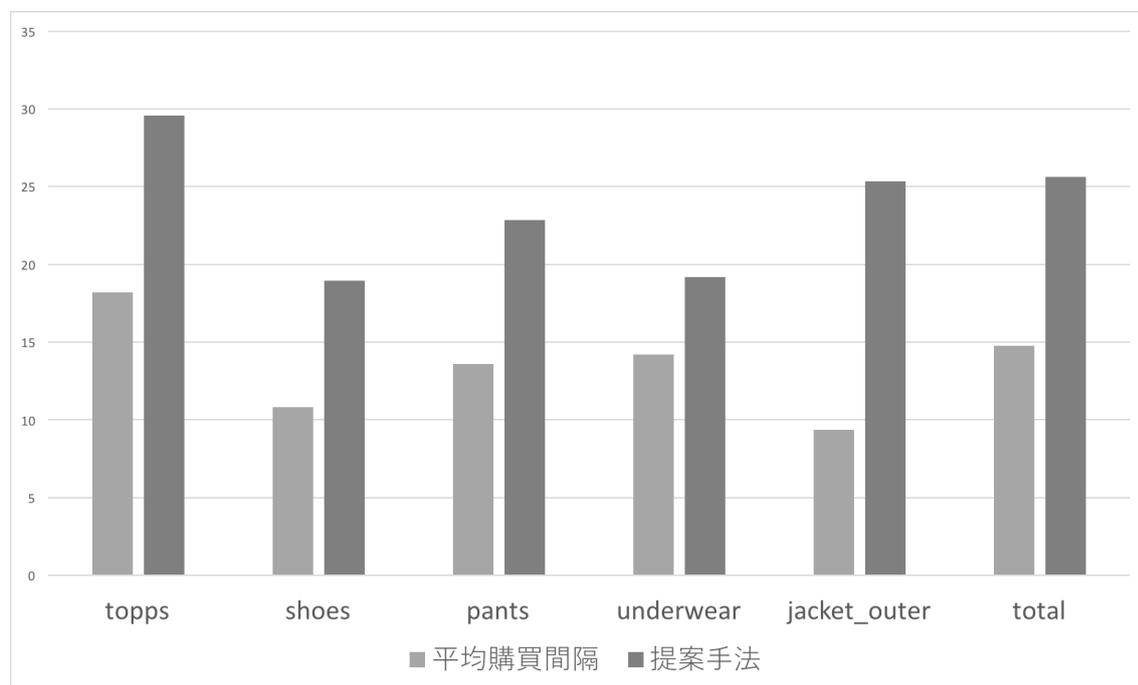


図 4.13: 平均購買感覚による方法と本手法の正解率 (左: 平均購買間隔, 右: 本手法)。平均購買間隔による一期先予測は正解率 14.7%, 本手法の正解率 25.6%。一期先予測に関して本手法が平均購買間隔による手法より 10 %以上向上している。またすべてのカテゴリにおいて本手法が平均購買間隔による手法を上回っていることが図より確認できる。

表 4.3: 本手法と平均購買間隔による一期先予測の正解率

M	平均購買間隔	本手法
4	10.3	18.7
5	11.9	21.4
6	13.4	23.3
7	14.7	25.6

4.5 本章のまとめ

本研究では近年提唱された RFMC の C に焦点をあて、その動的な変動を捉えるために購買間隔を状態空間モデルでの枠組みで定式化し、EC サイトの 1 年分の実データを用いて検

証した。その結果、各カテゴリには売上のベースとなるような定期購買者の存在が示唆された。また本手法によって検出可能な顧客は従来のRFM分析では見落とされる顧客であるが重要な顧客であるといえる。また4.4.3節の予測を用いることで次回購買が予測可能になり、比較手法よりもより精度の高いタイミングで施策を実施することが可能となる。

今後の課題として購買間隔生成にマーケティング変数を取り入れることが考えられる。これはZhang, Bradlow and Small (2013)が述べるようにRFMCを統合的に扱う必要がある。そのため本モデルにRFMを取り込んだモデル化が必要である。また本研究では計算時間の都合上、全ての顧客を分析対象としなかった。そのため実務で利用できる範囲に計算時間を抑えることも今後の課題である。先行研究では同様の点過程モデルで購買間隔ではなく購買発生確率を焦点にしモデル化し購買予測しているアプローチも提案されているKim, Takaya and Sawada (2014)。これらの比較や組み合わせた分析方法も今後の課題となる。

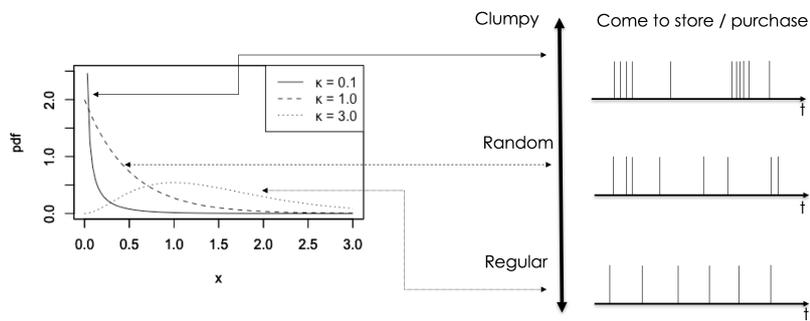


図 4.1: ガンマ分布とガンマ過程から発生させたイベントの発生例. 左: $\kappa = 0.1, 1.0, 3.0$ を変化させたときのガンマ分布. 右: ガンマ過程から発生させたイベント発生の概略図. κ が大きいと発生間隔が規則的になり, 小さくなるほど不規則的に発生する.

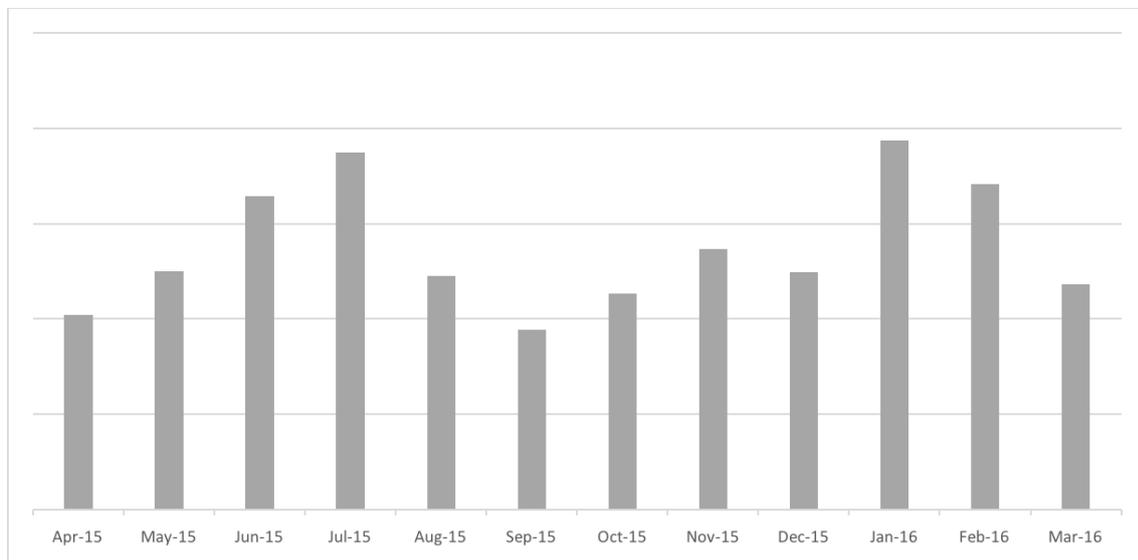


図 4.4: トップスカテゴリの月別販売個数. 7月と1月に販売個数のピークとなっている. (縦軸はサイトの特定に繋がる可能性があるため削除してある.)

第5章 おわりに

5.1 本研究のまとめ

本研究では、実店舗とECサイトにおける顧客の購買行動のメカニズムを明らかにし、個人別のマーケティング施策を高度化するための手法を提示することを目的に分析モデルを提案した。具体的には購買に与えるプロモーション効果と購買間隔の時間変化に着目し、マーケティング・サイエンスで用いられている理論に統計モデルを適用した。本研究では特に顧客毎のマーケティング変数の時間変動を捉えることに重きをおきプロモーションを実施するタイミングを高度化するための One to One マーケティング施策を議論した。

第3章では実証分析では実店舗（小売業）における FSP にて実施されている個人別クーポンの効果を推定した。実店舗（小売業）における個人別にカスタマイズされたクーポン（値引き）の発行はまだまだ普及しておらず、そのプロモーションが購買行動へ与える長期的なインパクトは計測困難である。そこで本研究では佐藤・樋口 (2008) が提案したフレームワークを用いてネステッド・ロジットモデルによる来店・購買行動の離散選択モデルを構築し、個人別プロモーションの影響をモデル内に説明変数として取り込み、その時間変動を推定した。プロモーション効果の推定は店舗内で高価格な人気商品であるソーセージ A と日常的に購買されている低価格な商品である納豆 A の 2 商品について実施した。推定した時変係数の推定結果から、高価格帯であるソーセージ A のディスカウントプロモーションが購買へ与える影響は、ほとんどの顧客においてクーポン利用開始当初が最大となり時間の経過とともに減衰することが確認された。また購買へ与える影響は大きくないものの期間中一定である顧客や期間中において一時的に高くなるといった顧客も確認された。これらの顧客はプロモーションが与える時間変動を推定することで明らかとなる顧客であり、顧客の変化を捉えることが可能となりマーケティングがプロモーション内容を考察する手がかりとなり得る。他方、日常購買されている低価格な納豆 A の推定結果もソーセージ A と同様に多くの顧客においてクーポン利用開始当初が最大となり時間の経過とともに減衰することが確認された。しかしながらソーセージ A と納豆 A においてその減衰に違いが現れた。ソーセージ A はクーポン利用開始当初において納豆 A より高い値を示したが、後半は衰退が早い様子となり短期的に強い影響を与える。反対に納豆 A はクーポン利用開始当初からさほど高い

効果ではないが、長期的に購買へ影響を与えていることが確認できた。

第4章ではファッション系 EC サイトにおける購買ログから購買間隔の変動に着目し、その時間変動をモデル化し個人の購買行動のパターンの変化を推定した。第1章でも述べたように消費者はニューウェーブ技術を活用し、購買が多様化している。そのため企業は顧客の購買パターンを把握し、多様化した顧客に対応したマーケティング施策を実施する必要性強く求められている。そこで本研究では購買間隔に生成分布を導入し、購買発生率と購買の規則性を表すクラumpinesをモデル化し、その時間変動を推定した。クラumpinesはCRMにおける最も利用される分析方法であるRFM分析を拡張したもので、リセンサー・フリークエンシー・マネタリーに加えて新たな軸であるクラumpinesを追加したRFMC分析の1つの軸である。本研究ではクラumpinesの時間変動を推定し、短期間の連続的購買や定期的な購買パターンを推定した。

ファッション系 EC サイトのデータを利用し実証分析の結果、カテゴリ毎、個人毎に購買パターンが異なることが確認された。例えばアンダーウェアのカテゴリを購入する顧客にはレギュラーな購買間隔で購入する顧客が多く存在する。このような顧客は購買頻度が高くない購買金額が高くないことからRFM分析において優良顧客と判断されない。しかし定期的な購買をしている顧客はECサイトのファンであり継続的に利益をもたらしてくれる顧客であるため重要である。アンダーウェア以外にもパンツ・ジャケット/アウター・シューズ・トップスのカテゴリを購入する顧客を対象にクラumpinesを推定し、カテゴリにおける購買パターンの違いを確認した。またクラumpinesの時間変動を推定したことで連続購買から定期的な購買へと変動する様子が確認可能となる。また推定結果から次回購買を予測することでマーケターが次回来店時に利用しやすいカテゴリへ誘導が可能となり、顧客のECサイトへの満足度が向上することが期待できる。

5.2 本研究の課題と今後の展望

本研究では2つの統計モデルを提案してきた。しかし提案モデルにも研究課題が残されている。それらの事項について示す。

第3章ではSKU単位のデータに対してモデル化している。実証分析対象が小売店であることから商品の購買するもしくは購買しないの2項選択問題のみを取り扱っている。しかし実店舗において商品を購入する際には競合製品が陳列されているため、2項選択ではなく多項選択モデルへの拡張が必要であろう。またFSPにおける個別プロモーション効果を推定したが、実際にはチラシなどのマス向けのプロモーションも実施されている。そのため個人別とマス向けのプロモーションが同時に推定されるモデル化が必要である。

第4章では購買間隔に生成分布を導入した。この生成分布はガンマ分布と仮定したが、マーケティング・サイエンスにおいてその妥当性は議論されている。そのためガンマ分布以外にも指数分布や対数正規分布等を仮定し推定する必要がある。また本研究ではクラмпネスの時間変動を推定するためにポイント・プロセスによるモデル化であるためマーケティング変数が導入されていない。青柳・佐藤 (2015) が示すように構造モデルを導入し、階層的なモデル化が必要であろう。

謝辞

本論文は、筆者が明治大学大学院先端数理学研究科現象数理学専攻博士課程において、マーケティング・サイエンス関連の研究を同大学大学院中村和幸准教授の指導のもとに行った研究成果をまとめたものです。指導教官である中村和幸准教授には、研究活動全般にわたり格別なるご指導とご高配を賜りました。社会人学生であるため遅くまでご指導いただき、基礎的なことから研究計画の立案方法等ご指導いただき深く感謝申し上げたい。また田野倉葉子博士には叱咤激励を受け研究の指針やデータ解析方法を教授いただいただけでなく、社会人としての数々のご助言をいただき、深く感謝申し上げたい。最後に仕事と研究の両立の支援など、学位取得に向けて惜しみないサポート頂いたNTTアイティ株式会社、NTTテクノクロス株式会社およびNTT労働組合持株グループ本部NTTテクノクロス分会の皆様にお礼申し上げます。そして、本研究を進めるにあたり、多くの方々にお世話になりました。ご支援、ご協力をいただきながらここにお名前を記すことができなかった多くの方々に心より感謝申し上げます。

本論文の研究は、経営科学系研究部会連合協議会が主催するデータ解析コンペティションにて提供いただいたデータを用いて進められました。研究のために貴重なビジネスデータを提供いただいた参加企業様に深く謝意を表するとともに、データ解析コンペティション事務局の方々に深く御礼申し上げます。

参考文献

- Abe, Makoto (2009) “Counting your customers one by one: A hierarchical Bayes extension to the Pareto/NBD model,” *Marketing Science*, Vol. 28, No. 3, pp. 541–553.
- Allenby, Greg M, Robert P Leone, and Lichung Jen (1999) “A dynamic model of purchase timing with application to direct marketing,” *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 94, No. 446, pp. 365–374.
- Alvarez Alvarez, Begoña and Rodolfo Vázquez Casielles (2005) “Consumer evaluations of sales promotion: the effect on brand choice,” *European Journal of Marketing*, Vol. 39, No. 1/2, pp. 54–70.
- Bass, Frank M, Norris Bruce, Sumit Majumdar, and BPS Murthi (2007) “Wearout effects of different advertising themes: A dynamic Bayesian model of the advertising-sales relationship,” *Marketing Science*, Vol. 26, No. 2, pp. 179–195.
- Bawa, Kapil (1990) “Modeling inertia and variety seeking tendencies in brand choice behavior,” *Marketing Science*, Vol. 9, No. 3, pp. 263–278.
- Bell, David R and James M Lattin (2000) “Looking for loss aversion in scanner panel data: The confounding effect of price response heterogeneity,” *Marketing Science*, Vol. 19, No. 2, pp. 185–200.
- Bell, David R, Jeongwen Chiang, and Venkata Padmanabhan (1999) “The decomposition of promotional response: An empirical generalization,” *Marketing Science*, Vol. 18, No. 4, pp. 504–526.
- Bishop, Christopher M (2006) *Pattern recognition and machine learning*: springer.
- Blattberg, Robert C and John Deighton (1996) “Manage marketing by the customer equity test,” *Review of marketing*, Vol. 74, No. 4, pp. 136–144.
- Blattberg, Robert C and Scott A Neslin (1990) *Sales promotion: Concepts, methods, and strategies*: Prentice Hall.

- Blattberg, Robert C, Richard Briesch, and Edward J Fox (1995) “How promotions work,” *Marketing science*, Vol. 14, No. 3-supplement, pp. G122–G132.
- Bruce, Norris I (2008) “Pooling and dynamic forgetting effects in multitheme advertising: Tracking the advertising sales relationship with particle filters,” *Marketing Science*, Vol. 27, No. 4, pp. 659–673.
- Bucklin, Randolph E and Catarina Sismeiro (2003) “A model of web site browsing behavior estimated on clickstream data,” *Journal of marketing research*, Vol. 40, No. 3, pp. 249–267.
- Candy, James V (2016) *Bayesian signal processing: classical, modern, and particle filtering methods*, Vol. 54: John Wiley & Sons.
- Chintagunta, Pradeep K, Dipak C Jain, and Naufel J Vilcassim (1991) “Investigating heterogeneity in brand preferences in logit models for panel data,” *Journal of Marketing Research*, pp. 417–428.
- Clerc, Maurice and James Kennedy (2002) “The particle swarm-explosion, stability, and convergence in a multidimensional complex space,” *IEEE transactions on Evolutionary Computation*, Vol. 6, No. 1, pp. 58–73.
- Ehrenberg, Andrew SC (1959) “The pattern of consumer purchases,” *Applied Statistics*, pp. 26–41.
- Erdem, Tülin (1998) “An empirical analysis of umbrella branding,” *Journal of Marketing Research*, pp. 339–351.
- Fader, Peter S, Bruce GS Hardie, and Ka Lok Lee (2005) “Counting your customers the easy way: An alternative to the Pareto/NBD model,” *Marketing Science*, Vol. 24, No. 2, pp. 275–284.
- Gedenk, Karen and Scott A Neslin (2000) “The role of retail promotion in determining future brand loyalty: Its effect on purchase event feedback,” *Journal of Retailing*, Vol. 75, No. 4, pp. 433–459.
- Gönül, Füsün and Kannan Srinivasan (1993) “Consumer purchase behavior in a frequently bought product category: estimation issues and managerial insights from a hazard function model with heterogeneity,” *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 88, No. 424, pp. 1219–1227.

- Griliches, Zvi, Robert F Engle, Michael D Intriligator, and Daniel McFadden (1983) *Handbook of econometrics*: Elsevier.
- Guadagni, Peter M and John DC Little (1983) “A logit model of brand choice calibrated on scanner data,” *Marketing science*, Vol. 2, No. 3, pp. 203–238.
- Gupta, Sunil (1988) “Impact of sales promotions on when, what, and how much to buy,” *Journal of Marketing research*, pp. 342–355.
- (1991) “Stochastic models of interpurchase time with time-dependent covariates,” *Journal of Marketing Research*, pp. 1–15.
- Hausman, Jerry A and David A Wise (1978) “A conditional probit model for qualitative choice: Discrete decisions recognizing interdependence and heterogeneous preferences,” *Econometrica: Journal of the econometric society*, pp. 403–426.
- Helsen, Kristiaan and David C Schmittlein (1993) “Analyzing duration times in marketing: Evidence for the effectiveness of hazard rate models,” *Marketing Science*, Vol. 12, No. 4, pp. 395–414.
- Hui, Sam K, Yanliu Huang, Jacob Suher, and J Jeffrey Inman (2013) “Deconstructing the first moment of truth: Understanding unplanned consideration and purchase conversion using in-store video tracking,” *Journal of Marketing Research*, Vol. 50, No. 4, pp. 445–462.
- Jain, Dipak C and Naufel J Vilcassim (1991) “Investigating household purchase timing decisions: A conditional hazard function approach,” *Marketing Science*, Vol. 10, No. 1, pp. 1–23.
- Kennedy, James (2011) “Particle swarm optimization,” in *Encyclopedia of machine learning*: Springer, pp. 760–766.
- Kim, Hideaki, Noriko Takaya, and Hiroshi Sawada (2014) “Tracking temporal dynamics of purchase decisions via hierarchical time-rescaling model,” in *Proceedings of the 23rd ACM International Conference on Conference on Information and Knowledge Management*, pp. 1389–1398, ACM.
- Kitagawa, Genshiro (1996) “Monte Carlo filter and smoother for non-Gaussian nonlinear state space models,” *Journal of computational and graphical statistics*, Vol. 5, No. 1, pp. 1–25.

- (1998) “A self-organizing state-space model,” *Journal of the American Statistical Association*, pp. 1203–1215.
- Kondo, Fumiyo N and Genshiro Kitagawa (2000) “Time series analysis of daily scanner sales: extraction of trend, day-of-the-week effect and price promotion effect,” *Marketing Intelligence & Planning*, Vol. 18, No. 2, pp. 53–66.
- Kotler, Philip, Hermawan Kartajaya, and Iwan Setiawan (2016) *Marketing 4.0: Moving from Traditional to Digital*: John Wiley & Sons.
- Koyama, Shinsuke, Takeaki Shimokawa, and Shigeru Shinomoto (2007) “Phase transitions in the estimation of event rate: A path integral analysis,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, Vol. 40, No. 20, p. F383.
- Krishnamurthi, Lakshman and SP Raj (1988) “A model of brand choice and purchase quantity price sensitivities,” *Marketing Science*, Vol. 7, No. 1, pp. 1–20.
- Lachaab, Mohamed, Asim Ansari, Kamel Jedidi, and Abdelwahed Trabelsi (2006) “Modeling preference evolution in discrete choice models: A Bayesian state-space approach,” *Quantitative Marketing and Economics*, Vol. 4, No. 1, pp. 57–81.
- Manchanda, Puneet, Asim Ansari, and Sunil Gupta (1999) “The shopping basket: A model for multicategory purchase incidence decisions,” *Marketing Science*, Vol. 18, No. 2, pp. 95–114.
- Manski, Charles F, Daniel McFadden et al. (1981) *Structural analysis of discrete data with econometric applications*: Mit Press Cambridge, MA.
- Mazumdar, Tridib and Purushottam Papatla (2000) “An investigation of reference price segments.”
- McFadden, Daniel et al. (1973) *Conditional logit analysis of qualitative choice behavior*: Institute of Urban and Regional Development, University of California.
- McFadden, Daniel (1981) “Econometric models of probabilistic choice,” *Structural analysis of discrete data with econometric applications*, Vol. 198272.
- McFadden, Daniel L (1984) “Econometric analysis of qualitative response models,” *Handbook of econometrics*, Vol. 2, pp. 1395–1457.

- Mela, Carl F, Sunil Gupta, and Donald R Lehmann (1997) “The long-term impact of promotion and advertising on consumer brand choice,” *Journal of Marketing research*, pp. 248–261.
- Moe, Wendy W and Peter S Fader (2004) “Capturing evolving visit behavior in clickstream data,” *Journal of Interactive Marketing*, Vol. 18, No. 1, pp. 5–19.
- Neslin, Scott A, Caroline Henderson, and John Quelch (1985) “Consumer promotions and the acceleration of product purchases,” *Marketing science*, Vol. 4, No. 2, pp. 147–165.
- Park, Young-Hoon and Peter S Fader (2004) “Modeling browsing behavior at multiple websites,” *Marketing Science*, Vol. 23, No. 3, pp. 280–303.
- Peppers, Don (1993) *The one to one future: building relationship one customer at a time*: doubleday.
- Platzer, Michael and Thomas Reutterer (2016) “Ticking away the moments: Timing regularity helps to better predict customer activity,” *Marketing Science*, Vol. 35, No. 5, pp. 779–799.
- Rasmussen, Carl Edward and Christopher KI Williams (2006) *Gaussian processes for machine learning*, Vol. 1: MIT press Cambridge.
- Rossi, Peter E and Greg M Allenby (1993) “A Bayesian approach to estimating household parameters,” *Journal of Marketing Research*, pp. 171–182.
- Rust, Roland T and Anthony J Zahorik (1993) “Customer satisfaction, customer retention, and market share,” *Journal of retailing*, Vol. 69, No. 2, pp. 193–215.
- Schmittlein, David C and Robert A Peterson (1994) “Customer base analysis: An industrial purchase process application,” *Marketing Science*, Vol. 13, No. 1, pp. 41–67.
- Schmittlein, David C, Donald G Morrison, and Richard Colombo (1987) “Counting Your Customers: Who-Are They and What Will They Do Next?” *Management science*, Vol. 33, No. 1, pp. 1–24.
- Seetharaman, PB (2004) “The additive risk model for purchase timing,” *Marketing Science*, Vol. 23, No. 2, pp. 234–242.

- Seetharaman, PB and Pradeep K Chintagunta (2003) “The proportional hazard model for purchase timing: A comparison of alternative specifications,” *Journal of Business & Economic Statistics*, Vol. 21, No. 3, pp. 368–382.
- Seetharaman, PB, Andrew Ainslie, and Pradeep K Chintagunta (1999) “Investigating household state dependence effects across categories,” *Journal of Marketing Research*, pp. 488–500.
- Shimokawa, Takeaki and Shigeru Shinomoto (2009) “Estimating instantaneous irregularity of neuronal firing,” *Neural computation*, Vol. 21, No. 7, pp. 1931–1951.
- Shimokawa, Takeaki, Shinsuke Koyama, and Shigeru Shinomoto (2010) “A characterization of the time-rescaled gamma process as a model for spike trains,” *Journal of computational neuroscience*, Vol. 29, No. 1-2, pp. 183–191.
- Thurstone, Louis L (1927) “A law of comparative judgment.,” *Psychological review*, Vol. 34, No. 4, p. 273.
- Vilcassim, Naufel J and Dipak C Jain (1991) “Modeling purchase-timing and brand-switching behavior incorporating explanatory variables and unobserved heterogeneity,” *Journal of Marketing Research*, pp. 29–41.
- Winer, Russell S and Scott A Neslin (2014) *The history of marketing science*, Vol. 17: World Scientific.
- Yi, Youjae (1990) “A critical review of consumer satisfaction,” *Review of marketing*, Vol. 4, No. 1, pp. 68–123.
- Zhang, Yao, Eric T Bradlow, and Dylan S Small (2013) “New measures of clumpiness for incidence data,” *Journal of Applied Statistics*, Vol. 40, No. 11, pp. 2533–2548.
- (2014) “Predicting customer value using clumpiness: From RFM to RFMC,” *Marketing Science*, Vol. 34, No. 2, pp. 195–208.
- メルラボ (2014) 「メールマガジンに関する意識調査」, <https://mailmarketinglab.jp/survey-about-mail-magazine-2014/>.
- 阿部誠 (2008) 「コメント (1)(<特集>日本統計学会 75 周年記念特集 (III))」, 『日本統計学会誌. シリーズ J』, 第 38 卷, 第 1 号, 21–23 頁.

- (2011) 「RFM 指標と顧客生涯価値: 階層ベイズモデルを使った非契約型顧客関係管理における消費者行動の分析」, 『日本統計学会誌』, 第 41 巻, 第 1 号, 51–81 頁.
- 阿部誠・近藤文代 (2005) 『マーケティングの科学: POS データの解析』, 朝倉書店.
- 伊庭幸人・種村正美・大森裕浩・和合肇・佐藤整尚・高橋明彦 (2005) 『計算統計 II マルコフ連鎖モンテカルロ法とその周辺』, 岩波書店.
- 奥野拓也・中村和幸 (2016) 「個人別セールスプロモーション効果の推定」, 『数理モデル化と応用 (TOM)』, 第 9 巻, 第 3 号, 61–74 頁.
- (2018) 「状態空間モデルによる購買間隔の規則性の推定」, 『オペレーションズ・リサーチ』.
- 岡太彬訓・木島正明・守口剛 (2001) 「マーケティングの数理モデル」.
- 下川丈明 (2010) 「神経発火における発火率と不規則性の時間変化の推定」, 博士論文, 京都大学.
- 古川一郎・守口剛・阿部誠 (2003) 『マーケティング・サイエンス入門: 市場対応の科学的マネジメント』, 有斐閣.
- 佐藤忠彦・樋口知之 (2007) 「動的個人モデルによる購買生起行動の解析 (特集 CRM (顧客関係性マネジメント))」, 『マーケティングサイエンス』, 第 16 巻, 第 1 号, 49–73 頁.
- (2008) 「動的個人モデルによる消費者来店行動の解析 (日本統計学会 75 周年記念特集 (III))」, 『日本統計学会誌. シリーズ J』, 第 38 巻, 第 1 号, 1–19 頁.
- (2013) 『ビッグデータ時代のマーケティング—ベイジアンモデリングの活用』, 講談社.
- 山口景子 (2014) 「頻度の時間変化を考慮した階層ベイズモデルによるウェブサイト訪問行動の分析」, 『マーケティング・サイエンス』, 第 22 巻, 第 1 号, 13–29 頁.
- 山口類・土屋映子・樋口知之 (2004) 「状態空間モデルを用いた飲食店売上の要因分解」, 『オペレーションズ・リサーチ』, 第 49 巻, 第 5 号, 52–60 頁.
- 守口剛 (2002) 『プロモーション効果分析』, 朝倉書店.
- 小西葉子 (2006) 「存続時間分析による美容院顧客の来店確率予測」, 『統計数理』, 第 54 巻, 第 2 号, 445–459 頁.

- 小西貞則・越智義道・大森裕浩 (2008) 『計算統計学の方法-ブートストラップ・EM アルゴリズム・MCMC』, 朝倉書店.
- 照井伸彦 (2008) 『ベイズモデリングによるマーケティング分析』, 東京電機大学出版局.
- 清水聰 (2002) 「検証 消費者行動 (5) プロモーションの消費者に与える影響」, 『流通情報』, 第 400 号, 12-20 頁.
- 青柳憲治・佐藤忠彦 (2015) 「3 階層多変量状態空間モデリングによる動的市場反応形成メカニズムの解明」, 『日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌』, 第 58 卷, 70-100 頁.
- 中山雄司 (2016) 「顧客関係管理研究の新動向: 来店/購買間隔の不均一性を測るクランピネス指標」, 『甲南経営研究』, 第 57 卷, 第 2 号, 161-181 頁.
- 日高徹司・佐藤忠彦 (2016) 「消費者とブランドとの関係を考慮した階層ベイズモデルによるクロスメディア効果推定」, 『日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌』, 第 59 卷, 106-133 頁.
- 北川源四郎 (2005) 『時系列解析入門』, 岩波書店.
- 北村隆一・森川高行・佐々木邦明・藤井聡・山本俊行 (2002) 『交通行動の分析とモデリング』, 技術堂出版.
- 本橋永至・樋口知之 (2013) 「市場構造の変化を考慮したブランド選択モデルによる購買履歴データの解析」, 『マーケティング・サイエンス』, 第 21 卷, 第 1 号, 37-59 頁.

付録 A

A.1 ガンベル分布

ガンベル分布の分布関数は,

$$F(\epsilon_{j,t,i}) = \exp(-e^{-\omega(\epsilon_{j,t,i}-\eta)})$$

であり, 密度関数は,

$$f(\epsilon_{j,t,i}) = \omega^{-\omega(\epsilon_{j,t,i}-\eta)} \exp(-e^{-\omega(\epsilon_{j,t,i}-\eta)})$$

で表される. ここで μ は分布のばらつきを表すスケールパラメータであり, η は分布の位置を表すロケーションパラメータである.

ガンベル分布の次のような性質を持っている.

- モードが η , 平均値が $\eta + \frac{\gamma}{\omega}$ (γ はオイラー一定数)
- 分散が $\frac{\pi^2}{6\omega^2}$
- ϵ_1, ϵ_2 がそれぞれ $(\eta_1, \mu_1), (\eta_2, \mu_2)$ のパラメータを持つ互いに独立なガンベル分布に従うとき, $\epsilon = \epsilon_1 - \epsilon_2$ は次のロジステック分布に従う.

$$F(\epsilon) = \frac{1}{1 + \exp(\mu(\eta_2 - \eta_1 - \epsilon))}$$

- $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_J$ がそれぞれ $(\eta_1, \mu_1), (\eta_2, \mu_2), \dots, (\eta_J, \mu_J)$ のパラメータを持つ互いに独立なガンベル分布に従うとき, $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_J$ の最大値 $\max(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_J)$ もガンベル分布に従い, そのパラメータは以下になる.

$$\left(\frac{1}{\mu} \ln \sum_{j=1}^J \exp(\mu\eta_j), \mu \right)$$

A.2 マルコフ連鎖モンテカルロ法

A.2.1 ギブス・サンプラー

マルコフ連鎖モンテカルロ法の基本的なアルゴリズムとして知られるギブス・サンプラーについて示す。この方法は、Geman and Geman(1984)による画像復元のためのアルゴリズムとして知られていたが、Gelfand and Smith (1990)が事後分布からのサンプリング法として応用したため統計科学の分野において広く広まった。

A.2.2 ギブス・サンプラーのアルゴリズム

パラメータ $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)$, 観測データ \mathbf{y} , パラメータの事後分布を $\pi(\theta | \mathbf{y})$ とする。周辺事後分布や事後平均などを求めることが難しい場合に、初期値を $\theta^{(0)}$ として, $\{\pi(\theta^{(i)} | \theta^{(i-1)})\}$, すなわち $\pi(\theta^{(1)} | \theta^{(0)}), \pi(\theta^{(2)} | \theta^{(1)}), \dots, \pi(\theta^{(i)} | \theta^{(i-1)})$ のそれぞれから得られるサンプリング系列 $\{\theta^{(0)}, \theta^{(1)}, \dots, \theta^{(i)}\}$ はマルコフチェーンであるため, 次のように反復的に θ を発生させることにより事後分布からの標本を得るのがギブス・サンプラーである。

- 1). 初期値である $\theta^{(0)} = (\theta_1^{(0)}, \theta_2^{(0)}, \dots, \theta_p^{(0)})$ を適当な分布から発生させる
- 2). $\theta^{(i)}, (i \geq 0)$ が得られたら
 - I). $\theta_1^{(i+1)}$ を $\pi(\theta_1 | \theta_2^{(i)}, \dots, \theta_p^{(i)}, \mathbf{y})$ から発生させる.
 - II). $\theta_2^{(i+1)}$ を $\pi(\theta_2 | \theta_1^{(i+1)}, \theta_3^{(i)}, \dots, \theta_p^{(i)}, \mathbf{y})$ から発生させる.
 - III). $\theta_3^{(i+1)}$ を $\pi(\theta_3 | \theta_1^{(i+1)}, \theta_2^{(i+1)}, \theta_4^{(i)}, \dots, \theta_p^{(i)}, \mathbf{y})$ から発生させる.
同様に $\theta_4^{(i+1)}, \dots, \theta_p^{(i+1)}$ を順次発生させていく. $\theta^{(i+1)} = (\theta_1^{(i+1)}, \theta_2^{(i+1)}, \dots, \theta_p^{(i+1)})$ を得たら 2a に戻り繰り返す.

ギブス・サンプラーを用いて事後分布から確率標本を得るには次のステップを実行する。

- 1). 初期値 $\theta^{(0)}$ からギブス・サンプラーを実行する.
- 2). N を十分大きな値にとり, 最初の N 個を初期値に依存する期間 (burn-in priod) として捨てる.
- 3). $\theta^{(i)} (i = N + 1, N + 2, \dots, N + m)$ を事後分布からの確率標本とする.

この方法を単一連鎖による方法と呼び、次のステップを実行する方法を多重連鎖による方法と呼ぶ。単一連鎖と多重連鎖は互いに一長一短があるためどちらが良いかは必ずしも明らかではないが、マーケティングサイエンスにおいては単一連鎖を用いることが多い。

- 1). m 個の初期値 $\theta^{(0,j)}$ ($j = 1, 2, \dots, m$) からそれぞれギブス・サンプラーを実行する。
- 2). m 個のそれぞれのギブス・サンプラーにおいて N を十分大きな値にとり、最初の N 個を初期値に依存する期間 (burn-in priod) として捨てる。
- 3). 第 j 番目のギブス・サンプラーによって発生した $\theta^{(N+1,j)}$ ($j = 1, 2, \dots, m$) を事後分布からの確率標本とする。

A.2.3 メトロポリス - ヘイスティング法

前述のギブス・サンプラー法で完全条件付分布が得られる場合にしか適用できず、実際の統計モデリングにおいては利用が限定される。そのため完全条件付分布が得られない場合に適用できるサンプリング法として Metropolis et al. (1953) に導入され Hastings (1970) によって一般化されたヘトロポリス-ヘイスティング (Metropolis - Hastings: M-H) 法がある。

A.2.4 メトロポリス - ヘイスティング法のアルゴリズム

パラメータ $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)$, 観測データ \mathbf{y} , パラメータの事後分布を $\pi(\theta | \mathbf{y})$ とする。MH アルゴリズムでは、提案分布 (proposal distribution) と呼ばれる確率分布を利用して目標分布からのサンプリングを行う。提案分布は、現在の状態を所与としたときの条件付確率分布であり、 $q(\theta | \mathbf{y})$ と表す。

MH アルゴリズムの特徴は、提案分布から次の状態の候補となる値を発生させ、それを採択確率 (acceptance probability) と呼ばれる値に従って採択するか棄却するかを決める点にある。一般的なメトロポリス-ヘイスティング法のアルゴリズムは、以下のようにしてサンプリングを行う。

- 1). $\theta^{(i)} = \theta$ 提案分布を用いて θ' を発生させ、 $\theta^{(i+1)}$ の候補とする。
- 2). 1) にて得られた θ' を確率 $\alpha(\theta, \theta')$

$$\alpha(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}') = \begin{cases} \min\left(\frac{\pi(\boldsymbol{\theta}' | \mathbf{y})q(\boldsymbol{\theta}', \boldsymbol{\theta})}{\pi(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}')}, 1\right), & \pi(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}') > 0 \text{ のとき} \\ 1, & \pi(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}') = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

で $\boldsymbol{\theta}^{(i+1)}$ として受容する。棄却した場合は $\boldsymbol{\theta}^{(i+1)} = \boldsymbol{\theta}$ とする。

3). 1) に戻る。

メトロポリス-ヘイスティング法の代表的なアルゴリズムである，ランダムウォークアルゴリズムについて示す。パラメータの更新は，下記のランダムウォークで行われる。

$$\boldsymbol{\theta}' = \boldsymbol{\theta} + \mathbf{z} \quad (\text{A.1})$$

ここで \mathbf{z} は $\phi(\mathbf{z})$ からのサンプルである。 $\phi(\mathbf{z})$ として正規分布などが使われる。この場合は，提案分布は $q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}') = \phi(\mathbf{z}) = \phi(\boldsymbol{\theta}' - \boldsymbol{\theta})$ であり，採択確率は

$$\alpha(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}') = \min\left(\frac{\pi(\boldsymbol{\theta}')\phi(\boldsymbol{\theta}' - \boldsymbol{\theta})}{\pi(\boldsymbol{\theta})\phi(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}')}, 1\right) \quad (\text{A.2})$$

となる。いま $\phi(\mathbf{z})$ として正規分布などの対象な候補分布を考えると， $\phi(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}') = \phi(\boldsymbol{\theta}' - \boldsymbol{\theta})$ であることから，採択確率は

$$\alpha(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}') = \min\left(\frac{\pi(\boldsymbol{\theta}')}{\pi(\boldsymbol{\theta})}, 1\right) \quad (\text{A.3})$$

と表される。この場合を特にメトロポリスアルゴリズムと呼ぶ。

次に独立連鎖 M-H アルゴリズムは提案分布が前のサンプルに依存しない声質を持つアルゴリズムであり，

$$q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}') = \phi(\boldsymbol{\theta}) \quad (\text{A.4})$$

と表されるため独立連鎖 M-H アルゴリズムと呼ばれる。従って採択確率は

$$\alpha(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}') = \min\left(\frac{\pi(\boldsymbol{\theta}')\phi(\boldsymbol{\theta})}{\pi(\boldsymbol{\theta}')\phi(\boldsymbol{\theta}')}, 1\right) \quad (\text{A.5})$$

となり，他はランダムウォークアルゴリズムと同様である。

A.3 Particle Swarm Optimization

Particle Swarm Optimization(PSO) は J.Kennedy と R.Eberhart によって提案された発見的最適化手法である (Clerc and Kennedy (2002))。最適解の探索方法は鳥や昆虫などの

生物が餌を探す際に情報を群れ全体で共有する行動するという仮説に基づいた手法である。つまり、群れの個体は独立に行動するのではなく、個体の持つ情報と群れの情報を相互に組み合わせることで最適解を探索する。

最適化手法の一つである PSO の特徴として以下があげられる。

- 探索点が複数個存在する多点型探索アルゴリズムである
- 微分情報を用いないため基本的な算術演算で計算が可能であり、従来の手法と比較して高速に解を探索できる

PSO は、探索空間に位置と速度を持った多数の粒子 (探索点) が存在し、各粒子のベストポジションと全体のベストポジションが共有されることで、各粒子の位置と速度を更新する。粒子 i の反復回数 k における n 次元の位置ベクトルと速度ベクトルをそれぞれ $\mathbf{x}_{k,i}$, $\mathbf{v}_{k,i}$ とすると更新式は、

$$\mathbf{x}_{k+1,i} = \mathbf{x}_{k,i} + \mathbf{v}_{k,i} \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{k+1,i} = & w\mathbf{x}_{k,i} + c_1r_1(\mathbf{pbest}_{k,i} - \mathbf{x}_{k,i}) + \\ & c_2r_2(\mathbf{gbest}_k - \mathbf{x}_{k,i}) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

である。ただし、 r_1, r_2 は 0 から 1 の一様乱数、 w, c_1, c_2 はそれぞれの項に対する重みパラメータ、 $(\mathbf{pbest}_{k,i})$ は粒子 i が反復回数 k までに探索した最良解、 \mathbf{gbest}_k はすべての粒子における反復回数 k までに探索した最良解である。図 A.1 に PSO における粒子の探索位置決定の概念図 A.1 を示す。各粒子は現在の位置 $\mathbf{x}_{k,i}$ からそれぞれの最良解へ向かうベクトル $(\mathbf{pbest}_{k,i} - \mathbf{x}_{k,i})$ 、群全体の最良解へ向かうベクトル $(\mathbf{gbest}_k - \mathbf{x}_{k,i})$ 、および速度ベクトルの重み付き線形結合で速度ベクトルを更新する。更新した速度ベクトル $\mathbf{v}_{k+1,i}$ から次の位置 $\mathbf{x}_{k+1,i}$ に移動する。

A.4 粒子フィルタ

粒子フィルタは、与えられた観測値の時刻によって異なる推定すべき分布 (予測分布・フィルタ分布・平滑化分布) を M 個の粒子を用いて以下のように近似する:

$$\{p_n^{(1)}, \dots, p_n^{(M)}\} \sim p(x_n | Y_{n-1}) \quad (\text{A.8})$$

$$\{f_n^{(1)}, \dots, f_n^{(M)}\} \sim p(x_n | Y_n) \quad (\text{A.9})$$

$$\{s_n^{(1)}, \dots, s_n^{(M)}\} \sim p(x_n | Y_N) \quad (\text{A.10})$$

$$\{v_n^{(1)}, \dots, v_n^{(M)}\} \sim p(v_n). \quad (\text{A.11})$$

ここで、 M 、 n および Y_n は粒子数、時刻、時刻 n までに得られた観測値の集合である。粒子数が多いほど分布の精度を高く近似できるが、分布の次元が高いほど多数の粒子が必要となる。

粒子フィルタのアルゴリズムは下記の通りである。

1. $j = 1, \dots, M$ について l 次元の乱数 $f_0^j \sim p_0(x)$ を生成する。
2. $n = 1, \dots, N$ について以下のステップを繰り返す。
 - (a) $j = 1, \dots, M$ について l 次元の乱数 v_n^j を生成する。
 - (b) $j = 1, \dots, M$ についてシステムモデルに基づいて p_n^j を計算する。
 - (c) $j = 1, \dots, M$ について尤度 $\alpha = p(y_n | p_n^{(j)}, \theta)$ を計算する。
 - (d) $\{p_n^{(1)}, \dots, p_n^{(M)}\}$ から $\{\alpha_n^{(1)}, \dots, \alpha_n^{(M)}\}$ に比例する確率で M 回の復元抽出し、 $\{f_n^{(1)}, \dots, f_n^{(M)}\}$ を生成する。

平滑化分布 $\{s_n^{(1)}, \dots, s_n^{(M)}\}$ は上記の粒子フィルタのアルゴリズムを過去の粒子を保存する形に修正することにより実現できる。具体的には $\{s_n^{(1)}, \dots, s_n^{(M)}\}$ は同時分布 $p(x_1, \dots, x_n | Y_n)$ の j 番目の実現値を示すものとし、2(d) を以下に変更する。

(d) $j = 1, \dots, M$ について $(s_{n-L|n-1}^{(j)}, \dots, s_{n-1|n-1}^{(j)}, p_n^{(j)})^T$ のリサンプリングにより、 $(s_{n-L|n}^{(j)}, \dots, s_{n-1|n}^{(j)}, s_{n|n}^j)$ を生成する。ただし、 $f_n^{(j)} = s_{n|n}^{(j)}$ で L は固定値とする。 L を大きくとると、 $p(x_n | Y_{n+L})$ は $p(x_n | Y_n)$ をよく近似するが、復元抽出の繰り返しにより分布が退化するため、 L はあまり大きくしないほうが良い。そのため、通常は $L = 20$ 程度、最大でも 50 以下にするほうがよいとされている (Kitagawa (1996))。

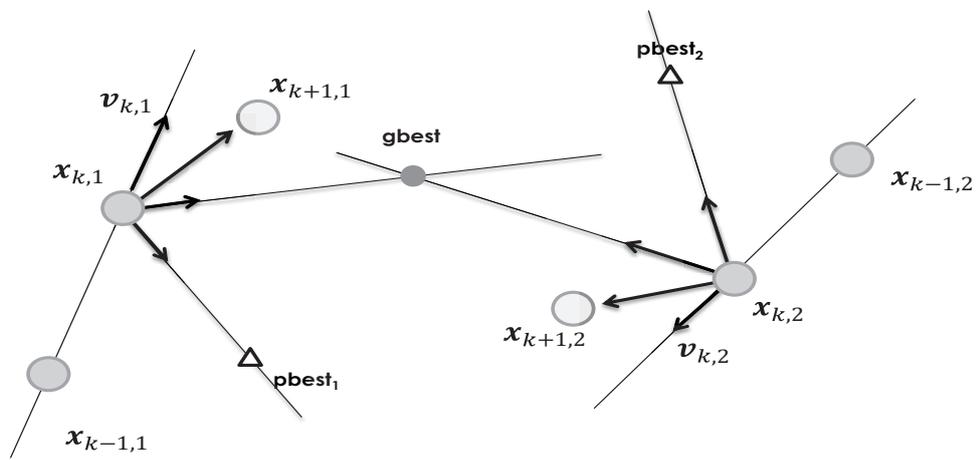


図 A.1: PSO における Particle の移動

付録B

B.1 EM アルゴリズム

イベント間隔列 $\{T_i\}_{i=1}^n$ からパラメータ $\gamma = (\gamma_\lambda, \gamma_\kappa)^T$ 推定は、対数周辺尤度を最大化することで得られる。今 m 反復でのパラメータ値を $\gamma^{(m)} = (\gamma_\lambda^{(m)}, \gamma_\kappa^{(m)})$ とする。まず完全データ対数尤度関数の条件付き期待値

$$\begin{aligned} Q(\gamma | \gamma^{(m)}) &= E[\log p(\{T_l\}_{l=0}^n, \{\theta_i\}_{i=1}^n; \gamma | \{T_l\}_{l=1}^n; \gamma^{(m)})] \\ &= E[\log p(\{T_l\}_{l=0}^n | \{\theta_i\}_{i=1}^n; \gamma) + \log p(\{\theta_i\}_{i=1}^n; \gamma | \{T_l\}_{l=1}^n; \gamma^{(m)})] \\ &= E[\sum_{i=1}^n \log f(T_i; \theta_i) + \sum_{i=2}^n \log p(\theta_i | \theta_{i-1}; \gamma) | \{T_l\}_{l=0}^n; (\gamma)^{(m)}] \end{aligned}$$

を計算し、これを γ について最大化したものをパラメータの更新値 $\gamma^{m+1} = (\gamma_\lambda^{(m+1)}, \gamma_\kappa^{(m+1)})$ とする。このステップを値が収束するまで繰り返す。ただし $m+1$ 番目の $\gamma^{(m+1)}$ は Q 関数を最大化により得られ、 $dQ/d\gamma = 0$ によって

$$\gamma_\lambda^{(m+1)} = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum_{j=0}^{n-2} E[(\lambda_{j+1} - \lambda_j)^2 | \{T_i\}_{i=0}^{n-1}; \gamma^{(m)}] \right\}^{-1}, \quad (\text{B.1})$$

$$\gamma_\kappa^{(m+1)} = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum_{j=0}^{n-2} E[(\kappa_{j+1} - \kappa_j)^2 | \{T_i\}_{i=0}^{n-1}; \gamma^{(m)}] \right\}^{-1} \quad (\text{B.2})$$

B.2 カルマンフィルタ

第 B.1 節の式 (B.1), (B.2) を計算するために、イベント間隔データ $\{T_i\}_{i=0}^{n-1}$ とハイパーパラメータ $\gamma^{(p)}$ が与えられた元での条件付き確率分布を計算する必要がある。条件付き確率分布がガウス分布に従うと仮定すると、平均と分散、共分散のみにより表すことが可能となる。本節ではこれらを以下のように表記する:

$$\theta_{j|l} \equiv E[\theta_j | \{T_i\}_{i=0}^l; \gamma^{(p)}], \quad (\text{B.3})$$

$$V_{j|l} \equiv E[\{\theta_j - \theta_{j|l}\} \{\theta_j - \theta_{j|l}\}^T | \{T_i\}_{i=0}^l; \gamma^{(p)}], \quad (\text{B.4})$$

$$V_{j,k|l} \equiv E[\{\theta_j - \theta_{j|l}\} \{\theta_k - \theta_{k|l}\}^T | \{T_i\}_{i=0}^l; \gamma^{(p)}] \quad (\text{B.5})$$

これらはカルマンフィルタと平滑化のアルゴリズムによって以下の一期先予測、フィルタリング、平滑化を繰り返し適用することで求めることが可能となる。

- 一期先予測

$$\theta_{j|j-1} = \theta_{j-1|j-1} \quad (\text{B.6})$$

$$V_{j|j-1} = V_{j-1|j-1} + Q_{j-1} \quad (\text{B.7})$$

- フィルタリング

$$p(\theta_j | \{T_i\}_{i=0}^j) = \frac{p(\theta_j | \{T_i\}_{i=0}^{j-1})p(T_j | \theta_j, \{T_i\}_{i=0}^j)}{p(T_j | \{T_i\}_{i=0}^j)} \propto p(\theta_j | \{T_i\}_{i=0}^{j-1})p(T_j | \theta_j). \quad (\text{B.8})$$

ここで $p(\theta_j | \{T_i\}_{i=0}^j)$ がガウス分布であることを仮定すると、対数事後分布は以下のよう
に表される。

$$\log p(\theta_j | \{T_i\}_{i=0}^j) = (-\frac{1}{2}(\theta_j - \theta_{j-1})^T V_{j|j-1}(\theta_j - \theta_{j-1}) + \log p(T_j | \theta_j) + \text{const.} \quad (\text{B.9})$$

ここでさらに事後確率分布 $p(\theta_j | \{T_i\}_{i=0}^j)$ をガウス分布と近似し、平均 $\theta_{j|j}$ は対数事後確率分布の最大値、分散 $V_{j|j}$ は対数事後確率分布の2階微分の逆数にマイナスを掛けた値とする
(ラプラス近似)。

$$\frac{d}{d\theta_j} \log p(\theta_j | \{T_i\}_{i=0}^j) |_{\theta_j = \theta_{j|j}} = 0, \quad (\text{B.10})$$

$$V_{j|j} = [\frac{d^2}{d\theta_j^2} \log p(\theta_j | \{T_i\}_{i=0}^j) |_{\theta_j = \theta_{j|j}}]^{-1} \quad (\text{B.11})$$

$$\theta_{i|n} = \theta_{i|i} + A_i(\theta_{i+1|n} - \theta_{i+1|i}), \quad (\text{B.12})$$

$$V_{i|n} = V_{i|i} + A_i(V_{i+1|n}^{V_{i+1|i}})A_i^T, \quad (\text{B.13})$$

ここで、

$$A_i = V_{i|i}V_{i+1|i}^{-1}. \quad (\text{B.14})$$

$$V_{i+1,i|n} = A_iV_{i+1|n}. \quad (\text{B.15})$$

これにより、式 (B.1),(B.2) における条件付き期待値を求めることができる。

$$\begin{aligned} E[(\lambda_{j+1} - \lambda_j)^2 | \{T_i\}_{i=0}^{n-1}; \gamma^{(p)}] &= V_{j+1|n-1}^{(1,1)} - 2V_{j+1,j|n-1}^{(1,1)} + V_{j|n-1}^{(1,1)} - (\theta_{j+1|n-1}^{(1)} - \theta_{j|n-1}^{(1)})^2 \\ E[(\kappa_{j+1} - \kappa_j)^2 | \{T_i\}_{i=0}^{n-1}; \gamma^{(p)}] &= V_{j+1|n-1}^{(2,2)} - 2V_{j+1,j|n-1}^{(2,2)} + V_{j|n-1}^{(2,2)} - (\theta_{j+1|n-1}^{(2)} - \theta_{j|n-1}^{(2)})^2 \end{aligned}$$