2016年度　理工学研究科
博士学位請求論文（要旨）

Study of sequentially Cohen–Macaulay graphs and its applications

学位請求者　基礎理工学専攻
東平光生

内　容　の　要　旨

1. 本研究の問題意識と目的

本研究は代数学と離散数学の境界領域に属する．代数学からは可換環を扱い，離散数学からはグラフや単体的複体を扱う．特にそれらの離散数学的対象から自然に定義される可換環を対象として研究を行う．

可換環論では正則性や正規性，完全交差性，Cohen–Macaulay 性，Gorenstein 性などの性質を中心に様々な不変量を扱い，可換環の分類をすることが主な目的となっている．そのため，環のそれらの特性の判定法や不変量の計算法が開発されてきた．離散数学的対象から定義される可換環に対しては，離散数学的性質と環論的性質とが相互に与える影響を調べることが一つの目的となる．特に，離散数学的不変量と環論的不変量の関係を明らかにすることが重要である．例えば，離散数学で問題となっていた上界予想（Upper bound conjecture）の解決には，単体的複体から定義される Stanley–Reisner 環の理論が用いられた．環論的不変量のヒルベルト係数と環論的性質の Cohen–Macaulay 性によってもたらされた成果であった．

本研究で対象にする可換環はすべて Stanley–Reisner 環である．本研究において，基本的かつ重要な主張を二つ紹介しよう．まず，次の主張がある．

定理 A　Pure な単体的複体が shellable であるならば，その Stanley–Reisner 環は Cohen–Macaulay 性を満たす．

本研究では，環論的性質である系列的 Cohen–Macaulay 性と離散数学的性質である shellable 性の関係について考察する．Shellable 性は定理Aにあるように，もとは pure な単体的複体に対して定義されていた．後に Björner–Wachs によって必ずしも pure でない単体的複体に対しても shellable 性が定義された．また系列的 Cohen–Macaulay 性は，Cohen–Macaulay 性の必要条件となるように Stanley により定義された性質である．定理Aの類似として Stanley は次の定理を証明した．

定理 B　単体的複体が shellable であるならば，その Stanley–Reisner 環は系列的 Cohen–Macaulay 性を満たす．

次に本研究の歴史的背景を述べる．Stanley–Reisner 環の定義イデアルは Stanley–Reisner イデアルと呼ばれる．グラフから定義される辺イデアルは Stanley–Reisner イデアルをなす．辺イデアルの概念は 1990 年に Villarreal によって導入された．辺イデアルの Stanley–Reisner 環がいつ Cohen–Macaulay 性を満たすか，その問題は中心的なテーマであった．以下，グラフから定義される Stanley–Reisner 環が (系列的)Cohen–Macaulay 性を満たすとき，そのグラフは (系列的)Cohen–Macaulay であると呼ぼう．一般に定理Aの逆は成立しないため，その成立の条件を求めることが問題となる．1997 年に，Estrada–Villarreal は二部グラフから定義される Stanley–Reisner 環に対して，定理Aの逆が正しいことを示した．2005 年に，Herzog–日比が poset の理論を用いることにより，Cohen–Macaulay である二部グラフの必要十分条件をグラフの辺の言葉で特徴づけた．その後，Villarreal により Cohen–Macaulay である二部グラフの辺の挙動がさらに研究された．まず 2007 年に，二部グラフが非混合になる条件を決定した．ここで非混合性は Cohen–Macaulay 性を満たすための必要条件であることを注意しておく．さらに 2008 年に，Villarreal らはグラフの拡張概念となる clutter について Cohen–Macaulay 性を研究した．2011 年に，Crupi–Rinaldo–寺井らが，二部グラフを含む very well-covered graphs のクラスについて Cohen–Macaulay 性を判定した．系列的 Cohen–Macaulay 性については，2008 年に Tuyl–Villarreal らが shellable 性との関係を研究し，二部グラフから定まる単体的複体について定理Bの逆が

成立することを示した．その研究はclutterの言葉で，free vertex property を満たすならば shellable である，ということに集約されている．その後，定理Aや定理Bの逆が成り立つグラフのクラスが見出されてきている．

以上を踏まえて，本研究の目的について述べる．まず，定理Bの主張が同値となるクラス (almost complete multipartite graphs) の提示をすることが一つの目的である．一方で，系列的 Cohen–Macaulay・二部グラフの辺の挙動は，Cohen–Macaulay・二部グラフほど完全な解決は得られていない．この解決が本研究におけるもう一つの目的である．辺の挙動の解明は辺イデアルの生成系の解明であり，環論的性質をグラフで視覚化できるだけでなく，具体的な可換環の例を多く構成することに役立つ．本研究では Herzog–日比や Villarreal の結果を用いて，系列的 Cohen–Macaulay・二部グラフの辺の挙動を部分的ではあるが解決する．またその応用として，より広いクラス (almost complete multipartite graphs) について系列的 Cohen–Macaulay 性を特徴づける．

可換環論における重要な不変量の一つとして，Castelnuovo–Mumford regularity がある．グラフから定まる Stanley–Reisner 環の Castelnuovo–Mumford regularity は，単にグラフの regularity と呼ばれる．本研究では，提示するクラス (almost complete multipartite graphs, semi-unmixed graphs) のグラフの結果を応用し，その regularity を計算する．Regularity に対応するグラフの不変量の一つとして，induced matching number が知られている．Katzman はこれら二つの不変量の間に不等式の関係があることを示した．系列的 Cohen–Macaulay・二部グラフについては，その不等式が等式として成立することが Tuyl によって示された．本研究では，系列的 Cohen–Macaulay である almost complete multipartite graph について regularity や induced matching number の計算を行う．これらの不変量の関係が等式となる新しいクラスを示すこともまた，本研究の目的の一つである．

2. 本研究の構成ならびに各章の要約

本論文は四つの章によって構成される．

第１章は本論文で統一的に用いられる記号や概念の定義および基本的な性質を述べる．主テーマとなる系列的 Cohen–Macaulay 性の定義と基本的性質もここで述べる．単体的複体の性質である shellable 性を定義し，系列的 Cohen–Macaulay 性との関係も述べる．さらに，グラフの系列的 Cohen–Macaulay 性や shellable 性について知られている事実を紹介する．

第２章では二部グラフが主な研究対象となる．まず，閉路をもつ二部グラフが系列的 Cohen–Macaulay であるならば，閉路の近傍に次数１の点が存在することを示す．これは Villarreal が述べた補題の精密化である．次に閉路の拡張概念を与え，系列的 Cohen–Macaulay 性の特徴づけを述べる．また，より一般的なグラフにおける系列的 Cohen–Macaulay 性や shellable 性についても成果を述べる．

第３章では二部グラフや完全グラフを含むグラフのクラスとして almost complete multipartite graph を導入する．次に，Herzog–日比の特徴づけを見直し，系列的 Cohen–Macaulay である二部グラフの辺の挙動を調査する．その結果を用いて almost complete multipartite graph の系列的 Cohen–Macaulay 性の特徴づけを行う．さらにその特徴づけの応用として，系列的 Cohen–Macaulay である almost complete multipartite graph について，その induced matching number と regularity が一致することを示す．

第４章では特殊な二部グラフである semi-unmixed graph を導入し，その系列的 Cohen–Macaulay 性の特徴づけを述べる．次に，Herzog–日比や Villarreal の二部グラフにおける結果を拡張する．また，第３章で述べた almost complete multipartite graph と semi-unmixed graph の関係を述べ，応用として regularity の計算も行う．