系列的 Cohen-Macaulay グラフの研究とその応用

２０１７年2月１６日

「博士学位請求論文」審査報告書

審査委員　（主査）　理工学部　専任教授

氏名　　　中村　幸男　　　㊞

（副査）　理工学部　専任教授

氏名　　　対馬　龍司　　　㊞

（副査）　理工学部　専任教授

氏名　　　藏野　和彦　　　㊞

１　論文提出者　　東平　光生

２　論文題名　　Study of sequentially Cohen-Macaulay graphs and its applications

（和文題名）　系列的 Cohen−Macaulay グラフの研究とその応用

３　論文の構成

本論文の構成は下記のとおりであり，本文は４章からなる。

４　論文の概要

本研究は代数学と離散数学の境界領域に属しており，グラフや単体的複体など離散数学的対象から自然に構成される可換環(Stanley-Reisner 環)を研究の対象としている。可換環論では正則性，正規性，完全交差性，Cohen-Macaulay 性，Gorenstein 性などの代数的性質の判定すること，及び Krull 次元，埋め込み次元，重複度，Cohen-Macaulay 型，といった様々な不変量を算出し可換環の分類をすることが主な目的である。本研究では，与えられた Stanley − Reisner 環の代数的性質や不変量が離散数学的な性質とどのように関連するかを

調査することを目標としている。特に，代数学としては可換環論の性質を，離散数学としては組み合わせ論やグラフ理論の性質に着目する。具体的には環論的性質の Cohen-Macaulay 性，系列的 Cohen- Macaulay 性と，組み合わせ論の性質である shellable 性，双方にまたがる非混合性を中心にこれらの性質がどう関連するかを調査した。

先行する研究の結果として，

（１） 単体的複体が非混合 shellable であるならば，その Stanley-Reisner 環は Cohen-Macaulay 性をみたす。

（２） 単体的複体が shellable であるならば，その Stanley-Reisner 環は系列的 Cohen-Macaulay 性をみたす。

ことが証明されており，逆の主張は一般には成立しないことが知られている。本論文はこの主張の逆がいつ成立するかについて，グラフ理論的な観点から研究したものである。また，グラフの形状からは Stanley-Reisner 環の定義イデアルの生成系に関する情報が得られる。その観点から，本論文はグラフから定まる Stanley-Reisner 環が系列的 Cohen-Macaulay となるときのグラフの形状を決定することにも調査し成果を上げている。なお，非混合性とは

Cohen-Macaulay ＝ 系列的 Cohen-Macaulay ＋ 非混合

となる性質を持ったものであり，Cohen-Macaulay 性についての結果は系列的 Cohen-Macaulay 性の結果の特殊な場合として得られることになる。

ここで，Stanley-Reisner 環 $k[\Delta]$ の歴史的意義を簡単に述べる。古典的な組み合わせ論で知られている単体的凸多面体の面の個数の上限を与える評価式を，単体的球面 Δ にも拡張した予想が懸案となっていたが（上限予想），Stanley は $k[\Delta]$ が Cohen-Macaulay であることが証明できれば上限予想は成立することを証明し，同時期に Reisner は位相幾何学的な手法で $k[\Delta]$ が Cohen-Macaulay となる判定法を発見した。それらを組み合わせることにより上限予想の正しいことが証明され，以後，Stanley‐Reisner 環は代数的組み合わせ論での主要な研究対象として研究されている。

以下，本論文の構成について述べる。本論文は四つの章によって構成されている。

第１章では可換環論，組み合わせ論，グラフ理論の境界分野で扱われる記号や概念の定義および基本的な性質が述べられている。可換環論における系列的 Cohen-Macaulay の性質と,組み合わせ論での shellable についての基本的な性質がまとめてあり,今後の議論の展開に必要な事柄が整理されて述べられている。そして,グラフ G が系列的 Cohen-Macaulay であるとは，対応する単体的複体 $\Delta(G)$ による Stanley-Reisner 環 $k[\Delta(G)]$ が系列的 Cohen-Macaulay となることと定義し,次の問題提起を行う。

（１） $\Delta(G)$ について,いつ系列的 Cohen-Macaulay と shellable が同値となるか？

（２） そのときグラフ G の辺と頂点はどのような形状となるか？

その後、この２つの問題に関連した過去の研究結果をまとめている。

第２章では二部グラフが主な研究対象となる。まず，閉路を持つ二部グラフが系列的 Cohen-Macaulay であるならば，閉路の近傍に次数１の点が存在することを示した。これは Villarreal の結果の精密化したものである。Villarreal は二部グラフが系列的 Cohen-Macaulay であるならば，どこかに次数が１となる頂点が存在することを証明したが，著者

は，閉路の近傍に次数が１となる頂点が存在することに改良した。これによって，二部グラフの系列的 Cohen-Macaulay 性の判定には閉路にのみ着目してチェックすれば良くなり，判定が極めて容易にできる場合が出てくることになった。また，次数が２以上の点からなる誘導部分グラフ（これは閉路の拡張概念ともいえるものだが）を使って，グラフが系列的 Cohen-Macaulay となる必要十分条件を書き表すことに成功した。

第３章では二部グラフや完全グラフを含むグラフのクラスとして概完全多部グラフ (almost complete multipartite graph) の概念を導入する。Herzog-日比は，二部グラフが Cohen-Macaulay となるための必要十分条件として，(CM1),(CM2),(CM3) という 3 つの条件を導き出した。(CM1) は二部グラフのマッチングに関する条件であり，(CM2) は頂点が良い順序付けを持つことを意味したものであり，(CM3) はいわゆる推移律を要求した条件となっている。これらはグラフの形状を表現した条件となっているため，視覚的に判定することが容易となる。二部グラフが系列的 Cohen-Macaulay となる条件についてもこのような視覚的な判定法があればよいのだが，現在のところ一般論としては，それは得られていない。しかしながら，概完全多部グラフについては，系列的 Cohen-Macaulay となるための条件を次のような形で与えた。概完全多部グラフ G はいくつかの二部グラフ G_1，G_2,…，G_n が組み合わさったものと考えられるのだが，これを用いることで，若干の仮定(*)のもと次の条件が同値になることが判明した。

（１）G は系列的 Cohen-Macaulay である。

（２）各 G_1，G_2,…，G_n は系列的 Cohen-Macaulay であり，かつ (CM1),(CM2) の条件を満たす。

若干の仮定(*)については，これを仮定しない状況でも必要十分条件は得られているのだが，記述に準備が必要となるのでここでは割愛する。証明の鍵となるのは，２つの単体的複体の合併が系列的 Cohen-Macaulay となる条件を書き出すことに成功したことが大きい。この成果の応用として，カステルヌーボ・マンフォード正則数の計算が上げられる。カステルヌーボ・マンフォード正則数は可換環論や代数幾何学など扱われる重要な不変量の一つである。一般にグラフの誘導マッチング数はカステルヌーボ・マンフォード正則数を超えないという事実があるのだが，本章で，系列的 Cohen-Macaulay な概完全多部グラフでは，カステルヌーボ・マンフォード正則数がグラフ理論での不変量である誘導マッチング数と一致することを証明している。

第４章では概完全多部グラフの非混合性について議論している。特殊な二部グラフである準非混合グラフ(semi-unmixed graph)の概念を導入することで，非混合な概完全多部グラフの特徴づけについて次のような特徴づけを与えるに至る。概完全多部グラフ G から派生する二部グラフを G_1，G_2,…，G_n とするとき，次が同値

（1）　G が非混合である。

（2）　G_1，G_2,…，G_n は次元が等しい準非混合な二部グラフである。

準非混合性とは，(CM1)，(CM2)条件に関係した概念であり，視覚的に判定可能な条件となるので，これにより概完全多部グラフの非混合性を視覚的に判定することが可能となった。また，第３章での結果と合わせて，概完全多部グラフの系列的 Cohen-Macaulay 性と非混合性の特徴づけを見ることで，自動的に Cohen-Macaulay 性の特徴づけも従うこととなる。更に

本章では応用の一つとして，非混合な概完全多部グラフでもカステルヌーボ・マンフォード正則数が誘導マッチング数と一致することを証明した。

5　論文の特質

概完全多部グラフの概念は，著者によって定義された概念であり，この概念の発見により，グラフの代数的特性の研究で，今まで研究対象となるグラフが二部グラフや完全多部グラフでまでで止まってたところを飛躍的に広げるに至った。また，典型的な応用例としてカステルヌーボ・マンフォード正則数の計算があり，二部グラフで知られていたカステルヌーボ・マンフォード正則数計算の自然な拡張が，概完全多部グラフでも得られることが証明された。これらのことは，今後のグラフの代数的性質を研究する上で大きな役割を演じたものであり，本論文の特質として挙げられる。

6　論文の評価

本論文はStanley-Reisner環を研究対象とした論文である。Stanley-Reisner環k[Δ] は単体的複体Δの情報を持った体k上の可換環であり，Δの離散数学的な性質が反映された代数的な対象となることから，代数学と離散数学との境界を扱う分野となる。特に，代数的な性質である系列的 Cohen-Macaulay 性と組み合わせ論的性質である shellable 性についてグラフ理論的な観点から考察し，「いつ shellabe と系列的 Cohen-Macauay は同値となるか，そのときのグラフの形状はいかなるものとなるか」という問題について取り組んだものである。一般にこの２つの概念は同値とはならないが，本論文では概完全多部グラフの概念を創設し，概完全多部グラフではこの 2 つの概念が同値となることを証明する。この成果により，多くの先行する結果が内包されることになった。また，概完全多部グラフが系列的Cohen-Macauay となるための必要十分条件と，そのときのグラフの形状を決定し，代数的な性質である系列的 Cohen-Macauay 性を視覚的に判定することを可能にした。さらに概完全多部グラフでのカステルヌーボ・マンフォード正則数の計算方法を与えるに至る。この他にも，閉路を用いた系列的Cohen-Macaulay性の判定を与えること，非混合な概完全多部グラフの特徴づけについても結果を出している。これらをもって本論文を高く評価するものとする。

7　論文の判定

学位請求論文は，理工学研究科において必要な研究指導を受けたうえ提出されたものであり，本学学位規程の手続きに従い，審査委員全員による所定の審査及び最終試験に合格したので，博士（理学）の学位を授与するに値するものと判定する。

以　上