正標数の超曲面によって定まる関数

メタデータ	言語: Japanese
	出版者:
	公開日: 2018-11-16
	キーワード (Ja):
	キーワード (En):
	作成者: 大田, 康介
	メールアドレス:
	所属:
URL	http://hdl.handle.net/10291/19705

２０１６年度　理工学研究科
博士学位請求論文（要旨）

正標数の超曲面によって定まる関数

学位請求者　基礎理工学専攻
大田康介

内　容　の　要　旨

１．本研究の問題意識と目的

可換環論には，標数 0 の世界，正標数の世界と混合標数の世界がある． 1980 年代後半 Hochster と Huneke による密着閉包の理論によって，正標数の可換環論が大発展した．正標数還元の手法により，正標数での結果は標数 0 の世界に大きく影響して，可換環論がより一層豊かになった．

ここで，可換環論の歴史を簡単に述べる．1870 年代 Dedekind によって，整数環（有理数体の有限次拡大の中での有理整数環の整閉包）における素イデアルの概念が導入された．イデアルの概念の誕生である．1890 年代 Hilbert が代数幾何学と不変式論の要請から多項式環を研究した．有名な定理として，Hilbert の基底定理や Hilbert の零点定理,Hilbert のシジジー定理などがある．1920 年代になると，Noether によって準素分解の理論が作られた．以降，ネーター環が，可換環論における中心的な研究対象となった．1920 年代から 1930 年代には Krull がネーター環の次元論を確立し，局所化や完備化の手法，正則局所環の概念を導入し，一般付値の理論を展開した．代数幾何学の方面で，1940 年代には，Zariski が一般付値論を特異点の解消などに応用し，Chevalley によって局所環の重複度の理論が作られた．1950 年代には永田によって，ヘンゼル環，擬幾何学的環の理論が作られ，またヒルベルトの 14 問題の反例が構成された．その頃，Auslander，Buchsbaum，Northcott，Rees，Serre たちによってホモロジー代数が可換環論に導入され，正則局所環がホモロジー代数の理論によって特徴づけられた．ホモロジー代数は，線型代数を一般の可換環上で展開したものである．Serre によって，正則局所環の素イデアルによる局所化もまた正則局所環になるという定理が証明されたが，Serre の証明方法以外に証明方法はないと言われている．

1950 年代以前は，可換環論が代数幾何学に応用されてきたが，Grothendieck の登場によって逆の流れが生まれた．1960 年代 Grothendieck のスキーム論によって，可換環自体が空間と思えるようになった．その結果，代数幾何学の手法が可換環論にそのまま応用できるようになった．Grothendieck による局所コホモロジーの理論の構築は，可換環論に多大な影響をもたらした．

次に，正標数の可換環について述べる．標数 0 の可換環を研究する際，解析的な手法を取ることがある．一方で，正標数の可換環を研究する際は，フロベニウス写像を考えることが基本的である．フロベニウス写像によって，ヒルベルト・クンツ重複度や F 符号，F 純閾値などの不変量が定義される．正標数の可換環論は，多くの研究者によって研究され,非常に豊かな理論となっている．1976 年 Kunz によって，有理数からなるある数列λ_eが定義された．λ_eは，標数 0 におけるヒルベルト関数の正標数版である．Kunz は，d 次元の局所環が正則であることと$\lambda_e = p^{ed}$となる e が存在することが同値であることを示した．このように，λ_eは正標数の可換環の正則性を決定づける尺度として見ることができる．その後，Monsky によってλ_eがより深く研究される．1983 年に Monsky は論文『The Hilbert-Kunz function』の中で，e→λ_eをヒルベルト・クンツ関数と呼んだ（以下，単にλ_eをヒルベ

ルト・クンツ関数と呼ぶ)．Monsky は，λ_eの e についての極限を考え,その極限が常に存在することを証明した．Kunz の定義したヒルベルト・クンツ関数が，研究者の間で再び注目され始めた．1996 年 Huneke の著書『Tight Closure and Its Applications』の中で，Huneke はλ_eの e についての極限値をヒルベルト・クンツ重複度と呼んだ．これは，標数 0 の環における重複度の正標数版である．重複度はイデアルの整閉包と深い関わりがあるのに対して，ヒルベルト・クンツ重複度は密着閉包と深い関わりがある．密着閉包は，イデアルの整閉包の正標数版である.密着閉包の理論は,1987 年に Hochster と Huneke により展開された．密着閉包によって，正標数の環の理論は大発展した．正標数還元により，標数 0 の可換環についての定理を正標数で密着閉包の理論によって証明したりできる．一方で密着閉包はヒルベルト・クンツ重複度と深く影響し合う．このように，ヒルベルト・クンツ重複度は，最近注目されるようになった．また，現在知られているヒルベルト･クンツ重複度のほとんどの例は，有理数である（プレプリントの中には，無理数となる例が紹介されているものもある)．標数 p のとき， p が小さければヒルベルト・クンツ重複度が p に無関係な値を取るが，p が大きくなると p についての関数になる例もある．ヒルベルト・クンツ重複度が，非常に不思議な振る舞いをすることが分かる．このような不思議さに，魅了される研究者は少なくない.

ヒルベルト・クンツ重複度によく似た概念として，F 符号なるものがある．2002 年に Huneke と Leusche による論文『Two theorems about maximal Cohen-Macaulay modules』の中で，F 符号が定義された．d 次元の被約な可換 F 有限ネーター局所環 A に対し，e 回のフロベニウス写像 A→A を考える．F によって得られる$F_*^e A$を直和分解した時に現れる A の個数の最大値をa_eとする．このとき，a_eをp^{ed}で割った有理数の e についての極限を F 符号と呼ぶ．また， F 符号が 1 であることと A が正則であることが同値であることが示された．この意味で，F 符号はヒルベルト・クンツ重複度と近い概念である．その後，多くの研究者によって，F 符号を定める極限が存在するかどうかの研究がなされた．そして 2012 年 Tucker によって，極限の存在が証明された．F 符号もまた，密着閉包と深い関わりがある．イデアル I の密着閉包をI^*と表記する．F 有限な可換環 A の F 符号が正の値を取れば，A のパラメタ系で生成されるイデアル I は，必ずI^*と一致する．このような環を F 有理と呼ぶ．F 有理環は，コーエン・マコーレーかつ正規環であり，標数 0 の有理特異点の正標数版である.

2004 年に，高木と渡辺の論文『On F-pure threshold』において，F 純閾値が定義された．F 純閾値もまた，フロベニウス写像によって定義される正標数の可換環の不変量である．F 純閾値は，必ず 0 から 1 までの値を取る．ただし，0 にはならない.

以下，本研究に至った経緯を述べる．k を完全体，R=k[[X_{ij}|i, j=1,2,3]]を 9 変数の k 上形式的ベキ級数環とする．3×3 行列 U=(X_{ij})に対して，f=det(U)とおく．博士後期課程の１年次に,指導教官の藏野和彦教授から,超曲面 R/(f)のヒルベルト・クンツ重複度，F 符号，F 純閾値を求める課題が与えられた． F 符号の計算をしていた時に，これらの不変量がある関数の中に現れることが分かった．そこで，研究方向を修正して，一般の超曲面に対応する関数$\xi_{f,e}(x)$を調べることにした．この関数は,それぞれの不変量が相互に関わり合う様子を観察できるような有意義なものであると思われる．例えば本論文の主定理から，ヒルベルト・クンツ重複度と F 純閾値の積が，必ず 1 以上になることが証明できる.

2. 本研究の構成ならびに各章の要約

第 1 節では,歴史的な背景を交えながら,ヒルベルト・クンツ重複度と F 符号について簡単に紹介する.

第 2 節では，主定理で用いる各記号の定義と主定理の証明をする．はじめにヒルベルト・クンツ重複度，F 符号を定義する.その後,関数$\xi_f(x)$を定義するために,$M_{e,t}$，$C_{e,t}$，$\xi_{f,e}(x)$を定義する．R=k[[$X_1, X_2, \cdots, X_{n+1}$]]を完全体 k 上の n+1 変数形式的ベキ級数環とする．このとき，

$M_{e,t} = \frac{(f^t)+m^{[p^e]}}{(f^{t+1})+m^{[p^e]}}$として定義する．すなわち，各$M_{e,t}$はフィルトレーション$R \supseteq (f) + m^{[p^e]} \supseteq \cdots \supseteq (f^t) + m^{[p^e]} \supseteq (f^{t+1}) + m^{[p^e]} \supseteq \cdots \supseteq (f^{p^e-1}) + m^{[p^e]} \supseteq m^{[p^e]}$の隣り合うものの間の剰余加群として定義する． $C_{e,t}$は$M_{e,t}$の加群としての長さをp^{en}で割った有理数として定義する．$\xi_{f,e}(x)$は$C_{e,t}$を用いて定義する．$\xi_f(x) = limsup_{e\to\infty}\xi_{f,e}(x)$と定義する．関数$\xi_f(x)$は区間[0,1]上の有界な単調減少関数である．また，x=0,1 で連続であり，$\xi_f(0)$はヒルベルト・クンツ重複度，$\xi_f(1)$は F 符号となっている．このように，$\xi_f(x)$はヒルベルト・クンツ重複度と F 符号の間を埋めるような関数であり，これら二つの不変量の一般化とも思える．$\xi_f(x)$の値が 0 か正であるかの x の臨界値が F 純閾値となっている．また，$\xi_f(x)$は確率密度関数となっている.微分について見てみると，R が正規環ならば$\xi_f(x)$の x=0 での微分が 0 になる

ことが分かる．例えば，F 符号が正の値を取れば，R は正規環であるから，$\xi_f'(0)=0$である．このように，F 符号の値が， x=0 の周りにおける$\xi_f(x)$のグラフの形に影響を及ぼす．以上が主定理である．組(R,f^t)のF符号は，Blickle と Schwede と Tucker の論文『F-signature of pairs: continuity, p-fractals and minimal log discrepancies』で定義された区間[0,1]上の関数である．この関数と当該論文の$\xi_f(x)$との関係について述べる．最後に，C_{e,p^e-1}にある条件を加えた場合において，$\xi_f(x)$の x=1 での微分の計算をする．

第３節では，主定理を証明するために，e と t を動かした時の$C_{e,t}$の振る舞いについて調べていく．区間[0,1]上の任意の点 a における$\xi_f(x)$の右極限と左極限を求める．このことから，$\xi_f(x)$が x=0,1 で連続となることが分かる．超曲面におけるF符号は，一般的な定義よりも具体的に書き表すことができる．すなわち，$\xi_f(1)$がF符号と一致する．このことを証明するために，行列分解についての基本的なことを述べる．

第４節では，具体例を述べる．f が単項式の場合における関数$\xi_f(x)$の計算をする．$\alpha_1\leq\alpha_2\leq\cdots\leq\alpha_n\leq\alpha_{n+1}\neq 0$として，$f=X_1^{\alpha_1}X_2^{\alpha_2}\cdots X_{n+1}^{\alpha_{n+1}}$とする．このとき，$\xi_f(0)$（ヒルベルト・クンツ重複度）は，f に現れる各変数のベキの和$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n+1}$である．F 純閾値は，$\frac{1}{\alpha_{n+1}}$である．したがって，$\xi_f(1)$（F 符号）は０か１のいずれかである．$\xi_f(1)$が 0 となるための必要十分条件は，$\alpha_{n+1}\geq 2$または$\alpha_n\geq 1$である．$\xi_f(1)$が 1 となるための必要十分条件は，$\alpha_{n+1}=1$かつ$\alpha_n=0$である．$\xi_f(x)$の不連続点は高々１つしかなく，不連続点が存在すれば，それはF純閾値である．$\xi_f(x)$が連続であるための必要十分条件も与えた．このように，$\xi_f(x)$が不連続である場合と連続である場合のいずれもが，存在することが分かる．