正標数の超曲面によって定まる関数

２０１７年2月１６日

「博士学位請求論文」審査報告書

審査委員　（主査）　理工学部　専任教授

氏名　　藏野　和彦　　　　　㊞

（副査）　理工学部　専任教授

氏名　　対馬　龍司　　　　　㊞

（副査）　理工学部　専任教授

氏名　　中村　幸男　　　　　㊞

１　論文提出者　　大田　康介

２　論文題名　　正標数の超曲面によって定まる関数

（英語文題）　A function determined by a hypersurface of positive characteristic

３　論文の構成

本論文の構成は下記のとおりであり，本文は４章からなる。

１　序章

２　記号と主定理

３　主定理の証明

４　f が単項式の場合

参考文献

４　論文の概要

1980 年代後半 Hochster と Huneke による密着閉包の理論によって，正標数の可換環論が大きく発展した。p を素数とし，1 を p 回加えて 0 になる環を標数 p の環という。標数が素数になる環を，正標数の環という。整数，有理数，実数，複素数など，1 を何回足しても 0 にならない環は，標数 0 の環と呼ばれる。標数 p の環では，$x+y$ の p 乗は，x の p 乗と y の p 乗の和になる。つまり，p 乗写像が環準同型写像になるのである。それを，フロベニウス写像という。標数 0 の世界には微積分という伝統的な手法があるが，正標数の世界特有のフロベニウス写像はそれに勝るとも劣らない強力な道具である。標数 0 の世界と標数正の世界は，正標数還元という方法で結びついている。つまり，標数 0 で証明したい命題

を，まずフロベニウス写像を用いて正標数の場合にそれに類似した命題を証明し，正標数還元によって標数 0 に戻してくるのである。つまり，正標数の世界の数学は，標数 0 の数学にも大きく貢献しているのである。1980 年代以降の正標数の可換環論の大発展により，多くの標数 0 の難解な定理が正標数還元によって, 非常にシンプルに証明することが可能になったわけである。正標数の可換環論の大発展において中心的な役割を果たしたのは，ヒルベルト・クンツ重複度や F 符号，F 純閾値(じゅんいきち)といったフロベニウス写像を用いて定義された正標数の可換環特有の不変量である。

ヒルベルト・クンツ重複度や F 符号，F 純閾値は，正標数の環に対する重要な不変量であり，密着閉包の理論と深く関連している。それらは，通常の重複度とイデアルの整閉包の理論との関係と非常によく似ている。ヒルベルト・クンツ重複度や F 符号，F 純閾値など正標数の不変量は，それぞれがフロベニウス写像を用いて定まる重要な不変量として個別に扱われていたようである。しかし，環が超曲面の場合は，それらの定義には深い類似点がある。本論文では，f で定まる超曲面の場合に，それらの定義の類似点に注目しながら，定義の一般化が行われている。つまり，ヒルベルト・クンツ重複度や F 符号を定義する数列を一般化し，それらの収束先として，[0,1] 閉区間で定義されたある単調減少関数 $\xi_f(x)$ を定義している。これにより，ヒルベルト・クンツ重複度や F 符号，F 純閾値などの正標数の不変量を統一的に扱うことに成功している。この関数 $\xi_f(x)$ によって，それぞれの不変量が相互に関わり合う様子を見ることが可能になったと言える。実際，本論文の主定理により，ヒルベルト・クンツ重複度と F 純閾値の積が，必ず 1 以上になることが証明されている。また，この関数 $\xi_f(x)$ を[0,1] 閉区間で積分すると 1 になることが証明されている。つまり，関数 $\xi_f(x)$ は確率密度関数である。この関数は，方程式によって定まる何らかの密度分布を表していると考えられる。確率密度関数を与えることは非常に重要なことであり，正標数の体上の形式的冪級数 f によって自然に確率密度関数が定まることにより，将来，大きな応用が期待できる。

第 1 章では，正標数の可換環論に関する歴史的な背景を紹介しながら，フロベニウス写像を用いて，Monsky によって定義されたヒルベルト・クンツ重複度と Huneke-Leuschke によって定義された F 符号を手短に導入している。それらの不変量の基本的な性質や特性について，(証明はせずに) 簡潔に説明されている。さらにその後の章で扱われる様々な概念に関して，定義や説明が与えられている。係数環が超曲面の場合に，これらの不変量をわかりやすく記述している。

第 2 章では, 主定理で使われる記号の定義と, 主定理の説明と証明の準備が行われている。ヒルベルト・クンツ重複度や F 符号は，フロベニウス写像を用いて定めたある数列の極限として定義される。ここで, 方程式 f によって定まる超曲面が係数環であるとき, ヒルベルト・クンツ重複度や F 符号を定義する数列に対して，その両方の共通の一般化を考えている。その一般化された数列を用いて，数列の収束先を値として，[0,1] 閉区間上で定まる関数 $\xi_f(x)$ が定義されている。この関数 $\xi_f(x)$ は有界な単調減少関数であることが証明されている。実は，この関数 $\xi_f(x)$ は $x = 0,1$ で連続であり，0 での値はヒルベルトルト・クンツ重複度，1 での値は F 符号となるのである。つまり，この関数 $\xi_f(x)$ はヒルベルト・クンツ重複度と F 符号の間を埋めるような関数であり, 関数 $\xi_f(x)$ 自身が二つの不変量の一般化とも思える。

さらに，この関数 $\xi_f(x)$ の値が 0 か正であるかの x の臨界値がＦ純閾値となっている。また，関数 $\xi_f(x)$ は確率密度関数となっていて，関数 $\xi_f(x)$ の値の分布は方程式 f によって定まる何らかの密度の変化を表していると考えられる。微分について見てみると，係数環が正規環ならば関数 $\xi_f(x)$ の $x=0$ での微分係数が 0 になることが，本論文で証明されている。それは，Huneke-McDermott-Monsky によるヒルベルトルト・クンツ関数の第二係数の研究と，フロベニウス順像の determinant を標準加群を用いて表した藏野による公式を用いて証明されている。Ｆ符号が正の値を取れば，方程式 f によって定まる環 R はＦ正則という環のクラスに入り(Huneke-Leuschke)，特に R は正規環である。よって，上の結果から関数 $\xi_f(x)$ の $x=0$ での微分係数は 0 であることがわかる。このように，Ｆ符号の値（つまり，関数 $\xi_f(x)$ の 1 での値）が， $x=0$ の周りにおける関数の微分係数，つまりグラフの形に影響を及ぼすことがわかるのである。

第３章では，主定理の証明のために，閉区間 [0,1] 上の任意の点における関数 $\xi_f(x)$ の右極限と左極限が議論されている。右極限と左極限を，ある数列の極限の形で簡潔にあらわしている。ここでの結果から，この関数 $\xi_f(x)$ は，$x=0,1$ で連続となることが分かるのである。一般に Ｆ符号は，フロベニウス順像のなかの係数環と同型な直和因子の個数によって定まるある数列の極限として定義される。しかし，この定義では，非常に計算が難しい。ここでは，超曲面の場合に，行列分解などの極大コーエン・マコーレー加群の表現論を用いることによって，Ｆ 符号を具体的に書き表すことができるということを示した。そのことを用いて，Ｆ符号が関数 $\xi_f(x)$ の 1 での値と一致することが示されている。

第４章では，f が単項式の場合に，関数 $\xi_f(x)$ が決定されている。$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_n \leq \alpha_{n+1} \neq 0$ を満たす非負整数の列に対して， $f = X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \cdots X_{n+1}^{\alpha_{n+1}}$ と定める。このとき，ヒルベルト・クンツ重複度 $\xi_f(0)$ は，f に現れる各変数のベキの和 $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n+1}$ であり，Ｆ 純閾値は，$\frac{1}{\alpha_{n+1}}$ であることは先行結果によって知られていた。本論文で，このケースで，関数 $\xi_f(x)$ を完全に決定している。実は，このケースでは，不連続点は高々１つしかないことが示されている。さらに，不連続点が存在すれば，それはＦ純閾値になるのである。不連続点での関数の値も，決定されている。$\xi_f(x)$ が連続関数であるための必要十分条件も記述することができる。つまり，このような単純な場合でも，$\xi_f(x)$ が不連続関数，連続関数のいずれにもなりうることが示されている。実は，関数 $\xi_f(x)$ が完全に決定できるのは，このように f が非常に単純な場合だけである。しかし，フラクタルなどを用いることによって，近似的な関数を見つけることができると期待されている。

５　論文の特質

この論文以前は，ヒルベルト・クンツ重複度やＦ符号，Ｆ純閾値は，それぞれが正標数の環に対する重要な不変量として別々に扱われていた。つまり，それらの関連性を調べるという試みは無かったようである。本論文で，超曲面に対して [0,1] 閉区間で定義されたある単調減少関数を定義することにより，これらの不変量を統一的に扱うことに成功している。実際に，Ｆ純閾値が正であれば，この関数の $x=0$ での微分係数が 0 になることが示されており，ヒルベルト・クンツ重複度をある数列の極限として計算するときの収束の速さがわか

る。また，ヒルベルト・クンツ重複度とF純閾値の積が，必ず 1 以上になることが証明されており，正標数の様々な不変量が，本論文で定義された単調減少関数 $\xi_f(x)$ によって繋がっている様子が見えてきた。このことが，本論文の特質である。

6　論文の評価

ヒルベルト・クンツ重複度やF符号を定義する数列に対して，本論文ではその両方の共通の一般化を考えることにより，f で定まる超曲面に対して [0,1] 閉区間上で定まる関数 $\xi_f(x)$ が定義されている。この関数は，[0,1] 閉区間で単調減少関数となることが証明され，ヒルベルト・クンツ重複度やF符号，F純閾値などは，この関数の性質として記述することができるようになった。その中で，超曲面の場合に，F符号を非常に簡潔に書き表す式を証明している。さらに，この関数によって，ヒルベルト・クンツ重複度やF符号，F純閾値が互いに深く繋がっていることがわかってきた。例えば，F純閾値が正であれば，この関数の $x=0$ での微分係数が 0 になることが示されており，ヒルベルト・クンツ重複度を数列の極限として計算するときの収束の速さがわかるのである。また，ヒルベルト・クンツ重複度とF純閾値の積が，必ず 1 以上になることが証明されている。さらに，特別なケースでこの関数を決定している。この関数は，連続関数になることもあれば，実際に不連続点を持つことがあることも確かめられた。本論文以前は，ヒルベルト・クンツ重複度やF符号，F純閾値は，それぞれが正標数の環に対する重要な不変量として別々に扱われており，それらの関連性を調べるという試みは無かったようである。ここで定義された関数や，この関数を調べることによってわかった様々な正標数の不変量の繋がりは，正標数の可換環論に大きく貢献しており，それは特筆すべき成果であると評価される。

7　論文の判定

本学位請求論文は，理工学研究科において必要な研究指導を受けたうえ提出されたものであり，本学学位規程の手続きに従い，審査委員全員による所定の審査及び最終試験に合格したので，博士（理学）の学位を授与するに値するものと判定する。

以　上