

「経済時系列分析の研究」

メタデータ	言語: Japanese 出版者: 明治大学社会科学研究所 公開日: 2012-05-24 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 新田, 功, 森, 久 メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/10291/12618

《共同研究》

「経済時系列分析の研究」

新 田 功 ☆1
森 久 ☆2

1970年に出版されたボックス (G. E. P. Box) とジェンキンス (G. M. Jenkins) の共著 *Time Series Analysis: Forecasting and Control* を契機として、社会科学の領域においても時系列モデルによる分析が時系列分析の主流を占めるようになった。その結果、今日では時系列分析=時系列モデル分析とみなされるまでになっている。このように時系列モデル分析が急速に普及した要因は、構造が最も単純な単変量時系列モデルでさえ、複雑な計量経済モデルに匹敵するような予測力をもちうるということが明らかになったからに他ならない。しかし、こうした特徴を有する一方で、時系列モデルに関しては理論および実証の両側面において、まだ解明すべき問題点が残されている。この共同研究では時系列モデルの再検討を中心的な課題として、経済時系列分析の研究を進めることにした。また、時系列モデルの理論面を検討するだけにとどまらず、実証分析を行うことを課題とした。このため、われわれが共通の分析対象として取り上げることにしたのは株価のデータである。株価のデータを上げた理由は、1) データが長期間にわたって連続的にえられること、2) 株価が他の経済指標に対して先行性をもつといわれていること、3) 株価が自由競争市場において決定される価格であり、時系列のランダムな変動を分析する格好の素材となること、この3点による。

分析対象である株価のデータの変動を時系列モデルとの関連において調べていく過程において、長期記憶効果 (long memory effect) の問題が注目された。いま、 t 時点における株価を $Z_t; t=0, 1, \dots, n$ で表し、また、株価収益率を

$$x_t = \ln Z_t - \ln Z_{t-1} \quad (1)$$

で定義するとき、 x_t の変動はランダムウォークにしたがうというのが通説になっている。もし、株価収益率がランダムウォークにしたがっているのであれば、その変動は、1次の自己回帰モデル AR(1) によって記述できるはずである。(1) 式との関連において AR(1) の一般式を定義すれば、

$$\ln Z_t = \phi_1 \ln Z_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2)$$

と表すことができる。ただし、 ϕ は自己回帰パラメータ、 ε は誤差項である。ランダムウォークは、1次の自己回帰モデルにおいて自己回帰パラメータが $\phi_1 = 1$ となる特殊な場合であり、非定常 (non-stationary) である。

AR(1) のもつ重要な性質の一つは、このモデルにおいては時系列の変動を過去のランダムシヨ

☆1 本学政治経済学部教授 ☆2 本学経営学部教授

ックの和としてとらえている点にある。つまり、当期の観測値を、遠く隔たった過去の記憶をもつものとしてとらえているのである。ランダムウォークの場合には、次式に示すように、当期の観測値に過去のランダムショックが等ウェイトで影響を及ぼすことになり、また、大数法則によって $\ln Z_t$ は正規型の分布にしたがうはずである。

$$\ln Z_t = \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2} + \dots \quad (3)$$

問題は、現実の株価収益率がランダムウォークにしたがうか否かであり、この点に関しては、かねてから一部の論者によって疑問が呈せられていた。そこで、もし株価収益率の時系列がランダムウォークにしたがわないとすれば、それはどのような要因によるのか、また、時系列モデル分析はそのような特性を持つ時系列の変動を分析するうえで役立つのかどうか、さらに、時系列モデルがこの点に関して限界をもつとすれば、それに代わりうる分析方法があるかどうかが問題となる。

この問題に焦点をあてて研究を進めたのが新田であり、1) 株価収益率のランダムウォーク仮説についての文献研究、2) 時系列モデル分析によるランダムウォーク仮説の検証と長期記憶効果の分析、3) スケール変換解析による長期記憶効果の分析、の3点を柱としてその研究成果をまとめたのが「株価変動と長期記憶効果」である。研究成果は次のように要約できる。46年間の東証株価指数のデータを対象とした株価収益率の時系列分析の結果、この系列の分布が正規性をもたず、また、独立性の条件も満たしていないことが示された。したがってランダムウォーク仮説を棄却すべきであるが、非定常な性質を有する時系列に対しては時系列モデルによる分析には限界がある。過去のランダムショックが累積して現在の観察値に影響を及ぼし、しかも個々のランダムショックの影響が微小であるような時系列の特性は時系列モデルにおいては看過されてしまうと考えられる。そこで、このような特性を有する時系列の分析方法として、長期間にわたるランダムショックの影響を明示的に分析することのできるスケール変換解析 (rescaled range analysis) を取り上げることにした。この分析方法によって株価収益率を分析することにより、株価収益率の変動の背後に長期記憶効果が存在することが推察された。

株価の時系列が他の経済指標に対して先行性をもつことは前述のとおりであるが、この先行性に注目して、予測モデルとしての時系列モデルの役割について考察を行ったのは森である。従来の時系列モデルに関する研究においては、単変量モデルについては豊富な研究事例があるのに対して、複数の変量間の分析に時系列モデルを応用した事例は限られているといえる。2変数以上の変数を同時に処理することのできる時系列モデルは多変量時系列モデル (伝達関数モデル) と呼ばれるが、このモデルは単変量時系列モデルに比べると理論および応用の両面において取り扱いが複雑であり、このことが多変量時系列モデルの足枷になってきたといつてよい。そこで森は、多変量時系列モデルの理論と、モデルのもつ予測力とを検討することに研究の焦点を合わせることにした。

多変量時系列モデルにもさまざまなものがあるが、予測への応用ならびにモデルの実用性という観点からすると、ベクトル値自己回帰モデル (vector auto-regressive model, VAR モデル) が中心的な役割をはたしている。いま t 時点における従属変数を Y_t 、先行指標変数 (説明変数) を X_t とする

とき、2変量 VAR モデルは次式で表すことができる。

$$\begin{aligned} Y_t &= a_1 Y_{t-1} + \dots + a_p Y_{t-p} + b_1 X_{t-1} + \dots + b_p X_{t-p} + \varepsilon_{1t} \\ X_t &= c_1 X_{t-1} + \dots + c_p X_{t-p} + d_1 Y_{t-1} + \dots + d_p Y_{t-p} + \varepsilon_{2t} \end{aligned} \quad (4)$$

このモデルを推定するためにはいくつかの制約を課すことが必要であり、さらに、ここでもまた長期記憶効果の議論が関わってくる。しかし、この制約条件の問題と記憶効果の問題については既存の研究においてもある程度調べられているので、モデルの構築と予測への応用に力点を置くことが得策であろう。

森が VAR モデルの構築を試みたのは個別企業の利益の系列に対してであり、株価を先行指標とする VAR モデルが利益の予測モデルとしてどの程度の有効性をもつかを調べることを研究の支柱とした。利益の指標としたのは1株当たり経常利益と1株当たり当期純利益である。他方、先行指標変数に関しては、企業の利益にとっては全産業よりも企業の属する産業の動向の方が重みを持つとの視点から、日本標準産業分類に準拠して28業種の産業ごとに算出されている業種別株価指数を先行指標として取り上げることにした。利益系列を時系列モデル分析の対象とするうえでの制約は、企業利益が半期ごとにしか公表されず、このためにデータ数が制約されてしまうことである。この制約のもとで利益系列の VAR モデルがどの程度のパフォーマンスを示しうるかということを、わが国の代表的な企業である日立製作所のデータを具体例として検証した。森の研究成果をまとめたのが「多変量時系列モデル（伝達関数モデル）による利益系列の分析」である。

株価変動と長期記憶効果

新 田 功

目 次

- I はじめに
- II ランダムウォーク仮説と効率的市場
- III 時系列分析によるランダムウォーク仮説の検証
- IV 株価変動と長期記憶効果
- V むすび

I はじめに

『ウォール街のランダムウォーク』(A *Random Walk Down Wall Street*⁽¹⁾) が版を重ね、ベストセラーになっていることに象徴されるように、株価の変動はランダムウォーク (random walk) にしたがるという仮説が今日では広範に受け入れられている。もし、この仮説が正しければ、株価はランダムに変動するために、将来の動きを過去の変動のパターンから予測することは不可能であるということになる。

このランダムウォーク仮説は効率的市場仮説と密接不可分な関係にあり、前者が否定されれば後者にも重大な影響が及ぶことになる。このため、特に1960年代においてランダムウォーク仮説をめぐるさまざまな検証が行われた。その結果、株価の時間的な変動が純粋なランダムウォーク過程であるかどうかについて疑問が提示された。その最も代表的な論者の一人はマンデルブロ (B. Mandelbrot) である。彼は株価変動の分布が正規分布をせず、安定パレート分布 (stable Paretian distribution) にしたがることを指摘した。同様の指摘は他の論者によってもなされている。

このようにランダムウォーク仮説に対して疑念がさしはさまれたにもかかわらず、1970年代以降、この仮説の妥当性をめぐる議論は低調に推移してきたように思われる。その原因は、効率的市場仮説が現代ポートフォリオ理論 (modern portfolio theory, MPT) の理論的前提として用いられるようになり、ランダムウォーク仮説も自明のこととして受け入れられていることに求められよう。

本稿の目的は、今日では顧みられることの少なくなったランダムウォーク仮説を時系列分析の視点から再検討することにある。このために、次の3点をこの論考での課題とする。第1に、ランダムウォーク仮説に関する古典的な研究に立ち戻り、ランダムウォーク仮説が持つ意味と、ランダムウォーク仮説の検証結果について再吟味する。第2に、わが国の代表的な株価指数である東証株価指数 (TOPIX) のデータを対象として、時系列分析法を用いてランダムウォーク仮説の検証を行う。対象

とする期間は1949年5月から1995年5月までの46年間であり、日次データと月次データを使用する。第3に、株価指数の変動を長期記憶過程との関係において再検討する。長期記憶過程とは、一見全くランダムな変動の中に、長期間にわたる過去の記憶が残存していることをいう。もし、株価の変動が純粋なランダムウォーク過程にしたがわないとすれば、株価が長期記憶過程にしたがっているのではないかとの視点から分析を行うことが、ここでの課題である。この課題のために筆者が取り上げるのはスケール変換解析 (rescaled range analysis, R/S 解析) と呼ばれる分析方法である。

II ランダムウォーク仮説と効率的市場

効率的市場仮説との関係において、ランダムウォーク仮説はどのような意味を持つのであろうか。また、この仮説を検証するために過去においてなされた研究においてはどのような方法が用いられ、また、どのような結論が導かれたのであろうか。本節ではこれらの点について簡単なサーベイを行う。

まず、効率的市場 (efficient market) の意味であるが、これは諸情報に対する証券市場の反応の仕方についての仮説である。多数の投資家が参加している資本市場では、すべての情報が、直ちに、しかも完全に証券価格の形成に反映される結果、特定の投資家が継続的に市場全体を上回る投資結果をあげることができない、と主張するのが効率的市場仮説である⁽²⁾。この仮説は、対象とする情報の範囲に応じて次の3つのレベルに区分される。第1は、ウィーク・フォーム (weak form) の効率的市場仮説であり、第2はセミストロング・フォーム (semi-strong form) の効率的市場仮説、第3はストロング・フォーム (strong form) の効率的市場仮説である⁽³⁾。

まず、ウィーク・フォームの効率的市場仮説においては、情報の範囲として過去の株価あるいは収益率が考えられている。そして、これらに含まれている情報が現在の株価に反映されている状態をもって市場の効率性の判定がなされる。次に、セミストロング・フォームの効率的市場仮説では、情報の範囲としては、増資、減資、決算報告などのすべての公開情報が考慮の対象になる。最後に、ストロング・フォームの効率的市場仮説では、情報の範囲をインサイダー情報にまで広げ、インサイダー情報と株価との関係が問題とされる。したがって、ウィーク・フォームの効率的市場仮説においては、そこにおいて考えられている情報の範囲は最も狭く、他方、ストロング・フォームの効率的市場仮説においては情報の範囲は最も広く考えられていることになる。

以上の3種類の効率的市場仮説の中で、ランダムウォーク仮説と密接な関わりを持つのは、第1のウィーク・フォームの効率的市場仮説である。この2つの仮説は最初から関連づけられていたわけではなく、株価の変動がランダムウォークにしたがうとの指摘がなされたのは、効率的市場仮説が確立される以前のことである。この指摘を最初に行ったのはバシュリエ (Louis Bachelier) であるといわれている⁽⁴⁾。しかし、バシュリエの研究は長い間埋もれたままであった。ランダムウォーク仮説が流布する契機となったのは、1959年にオズボーン (M. F. M. Osborne) が発表した研究であるとい

える。

彼は株価の変動が、微小な粒子のランダムな動きを表す、ブラウン運動 (Brownian motion) と同様の変動をすると考えた。ブラウン運動とは、花粉などのような大きさが数ミクロンの微粒子が、熱運動による水分子の衝突によってランダムに動き回る運動のことを指し、本来、物理学において発展した理論である⁽⁶⁾。通常のブラウン運動では粒子は上下・前後・左右いずれの方向にも動くことが可能な3次元の運動が考えられているのに対して、株価は上下にしか変動しない。このため、前者は3次元ブラウン運動、後者のような変動は1次元ブラウン運動と呼ばれることがある。そして1次元ブラウン運動はその運動の様子が酔漢の足取りに似ていることから、酔歩 (ランダムウォーク) とも呼ばれている。

オズボーンは、以下の7段階の仮定を通じて株価のランダムウォーク仮説を導いた⁽⁶⁾。

- [1] 株価は1/8ドルを単位として離散的に変化するものとする。
- [2] 単位時間当たりに行われる取引数は整数値かつ有限である。
- [3] 価格と、トレーダーや投資家の主観的な価値評価の間には関係があり、それはウェーバー・フェヒナーの法則と一致した形の関係である (感覚の強さは刺激の強さの対数の1次関数であるとする法則)。したがって問題となるのは株価の絶対的な水準ではなく、変化率である。
- [4] 証券の売買に際して、期待収益率の異なる証券があるとすれば、期待収益率の最も高い証券を選ぶことが「論理的な」決定である。期待収益率とは、収益率の確率に収益額を掛けたものである。
- [5] 証券の売り手と買い手の両者にとって利潤をえる確率が等しいことが、取引が行われる条件である。
- [6] ある株式の一連の取引において、おのおの取引の決定が独立に行われるならば、収益率 $Y(\tau) = \log_e [P(t+\tau)/P_0]$ の分布関数は、平均ゼロ、標準偏差 $\sigma_{Y(\tau)}$ の正規型であると予想できるのであり、 $\sigma_{Y(\tau)}$ は取引数の平方根に比例して大きくなる。取引数が各時点ではほぼ一様分布にしたがっているならば、 $\sigma_{Y(\tau)}$ は時間間隔の平方根に比例して大きくなる。すなわち、 $\sigma_{Y(\tau)} \propto \sqrt{\tau}$ の関係がある。
- [7] 以上を要約すると、いま、 k 個の独立変数 $y(i); i=1, \dots, k$

$$y(i) = \Delta i \delta \log_e P = \log_e [P(t+i\delta)/P(t+\{i-1\}\delta)]$$

ただし、 $P(t)$ は時点 t におけるある株式の価格、 δ は微小な取引間隔。

とおき、各 $y(i)$ の散布度がいずれも $\sigma(i) = \sigma'$ で同一であるとするならば、 k 回の取引後、すなわち時点 $\tau = k\delta$ 後の収益率 $Y(\tau)$ は、

$$Y(\tau) = Y(k\delta) = \sum y(i) = \log_e [P(t+\tau)/P(t)] = \Delta \tau \log_e P(t)$$

と規定することができ、また、 Y の散布度 $\sigma_{Y(\tau)}$ は、

$$\sigma_{Y(\tau)} = \varepsilon(Y^2) - [\varepsilon(Y)]^2 = \sum \sigma^2(i) = k\sigma' = \tau/\delta\sigma'$$

で与えられるのである。また、 $y(i)$ の分布関数がどのようなものであれ、 k が大きくなるにしたがって $Y(\tau)$ は正規分布に近づくことが中心極限定理によって保証される。

以上がオズボーンのランダムウォーク仮説の要旨である。彼の論文を今日読み返してみると、これらの仮説において論理の飛躍があることに気づく。それは、とくに、市場参加者が合理的であることを述べた [3] ~ [5] の仮定から、仮定 [6] を導く際に顕著であるように思われる。すなわち、仮定 [6] は独立性の仮定であり、ランダムウォーク仮説において最も重要な仮定であるが、投資家の意志決定が独立になされるという仮定はいささか唐突になされているのである。このため、[3] ~ [5] において示された合理的投資家の仮定から、[6] の独立性についての仮定を導くための議論について、補足説明が必要であろう。

この点に関して、ピーターズ (E. E. Peters) は、次のように整理している。すなわち、市場参加者は投資価値に見合った価格を支払うことに関心を持っており (仮定 [3])、また、2つの証券の期待値を所与とすると、市場参加者は期待収益率が高い方の証券を選ぶ (仮定 [4])。その結果、証券の取引は売り手・買い手の双方にとって有利であるときにのみ行われる (仮定 [5])。換言すれば、市場参加者は価格と投資価値を合理的に均等化することができるので、彼らは取引時点で入手できる情報に基づいて均衡価格で取引を行う。価格はすでに入手した情報を織り込み済みなので、証券の価格変化は独立である、と⁽⁷⁾。

上記のようなオズボーンのランダムウォーク仮説においては、仮定 [1] ~ [6] の帰結として、価格変化の分布が中心極限定理によって、正規分布にしたがうという結論が導かれている (仮定 [7])。周知のように、中心極限定理とは、互いに独立な確率変数の多数個の和の分布は近似的に正規分布をなす、という理論である。そこで、彼のランダムウォーク仮説が現実的な妥当性を持つことを証明するためには、株価の変動が独立であることを示し、また、株価変動の分布が正規分布にしたがっていることを示すことが必要である。オズボーンはこの目的のために、ニューヨーク証券取引所の株価およびダウ平均のデータを対象として仮説の検証を試みたが、コンピュータが未発達であった当時の状況ではやむをえないという事情があったものの、必ずしも十全な分析が行われたとはいえない。たとえば、株価変動の散布度を測定する際に、標準偏差を計算する代わりに四分位偏差を計算して代用していることや、独立性の条件を調べるために時系列データを分析対象とする代わりに、特定の時点での多数の株価の変動を対象としてこの条件を調べたことなどに、彼の分析の限界があったといえるであろう。オズボーン自身の検証作業において注目すべきことは、株価の分布が正規分布にしたがうとしても、それはあくまでも「近似的」にすぎないということを認識していた点にあるといえる⁽⁸⁾。

オズボーンの理論をさらに発展させて効率的市場仮説とランダムウォーク仮説との関係を定式化したのはファマ (Eugene F. Fama) である。彼は、株価のランダムウォーク仮説の条件として、1) 連続的な価格変化が独立であること、2) 価格変化がなんらかの型の同一分布にしたがうこと、の2点を指摘した。そして、この2つの条件について詳細に検討を行ったのである。

まず、独立性の問題について彼は次のように議論を展開している。独立性とは、統計学的には、時点 t での価格変化の確率分布がそれ以前の価格変化の系列とは独立であること、すなわち、時点 t 以前の価格変化についての知識が時点 t での価格変化の確率分布の評価に全く役立たないことを意味する。しかし、現実にはこのような「完全な」独立性を備えた時系列は存在しないであろう。したがって、厳密に言えば、ランダムウォーク仮説は現実を正確に記述することはできない。しかしながら、実用上の目的からすれば、価格変化の系列における依存性がある「受容可能な最小限」の範囲内に収まるならば、この仮説における独立性の仮定を容認できるであろう。そこで、今度は、「受容可能な最小限」の意味が問題になる。統計的にみれば、価格変動の系列における依存性が価格変化の分布の有するある特定の特徴を十分に説明できるかどうか、独立性の判断の基準となるが、株式市場の

実務家にとっては、ランダムウォーク仮説は、価格変動の系列の過去の動向についての知識が期待収益を高めるのに役立つに過ぎないかぎりにおいて、妥当性をもつといえよう。より具体的にいえば、実務的な見地からは、買い持ち (buy-and-hold) 戦略を上回る期待収益をあげないことがランダムウォーク仮説を支持する基準になる、と⁽⁹⁾。

ファマは、3種類の方法を用いてこの独立性の検証を行った。第1は、系列相関を調べる方法であり、第2は、連(ラン)による方法、第3は、フィルター・ルールによる方法である。彼は、株価の対数値の1階の階差を対象としてこれら3種類のテストを行った結果、実務上の観点からみた場合、株価の変動には依存性がみられないと結論している⁽¹⁰⁾。同様な結論は、わが国の株価を対象として同様のテストを行った奥田斉氏や小峰みどり氏の研究によっても確かめられている⁽¹¹⁾。

次に、株価変動の分布の型についての条件であるが、ファマの定義とオズボーンのランダムウォーク仮説との最も顕著な相違点はこの点にある。すなわち、オズボーンが株価変動の分布の型として正規分布を仮定したのに対して、ファマは分布の型を特定していないのである。ファマは、この点に関連して次のように述べている。すなわち、ランダムウォーク仮説を構成する2つの条件のうち、個々の証券の連続的な価格変化が独立であるという仮定は、価格変化がある型の確率分布に従うという仮定よりも重要であり、「ランダムウォークの一般理論においては分布の型は特定する必要はない⁽¹²⁾」と。彼はこのように述べた後で、すぐに、投資家の観点からすると、分布の型は株式投資の際のリスクを決定するうえで重要な要素であるから、分布の型を特定することは有益であると述べている⁽¹³⁾。

すでに述べたように、中心極限定理にしたがえば、確率変数の多数個の和は正規分布に近似し、しかもそれぞれの確率変数のもとの分布の型にかかわらず、このことが成立する。それでは、ファマは、なぜこのように中心極限定理に反して、株価の変動の分布の型についてオズボーンと異なった立場をとったのであろうか。その理由は、ファマ以前の研究において、株価の変動の分布が必ずしも正規分布にしたがうわけではないとの指摘がなされていたからにほかならない。たとえば、ムーア (A. Moore) やケンドール (M. G. Kendall)、さらにはアレクサンダー (S. S. Alexander) による研究は、株価の分布が正規分布に比べると急尖であることを明らかにした⁽¹⁴⁾。急尖の意味は、分布の両端に、正規分布から予想されるよりも多くの観察値が存在している、つまり、極端な変動を示した観察値が多くみられるということである。1960年以前の研究においては、こうした分布の両端に位置する極端な値が、他の観察値とは異なったメカニズムによって生成されているとの仮定がなされるのが一般的であった。そして、このような外れ値 (outlier) を、価格変動についての検証作業から除外してしまうということさえ行われた。

こうした処理方法に対して、マンデルブロは、外れ値が多数存在する場合、これを除外して残余のデータについてのみ検証を試みることは、検証の意義を損なうことになる」と批判した。そして、こうした外れ値を包含することのできる、より普遍的な分布として、安定パレート分布を提示したのである。

安定パレート分布の対数化した分布関数は次式で表される⁽¹⁵⁾。

$$\begin{aligned} \log f(t) &= \log \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(iut) dPt \quad (U < u) \\ &= i\delta t - \gamma |t|^\alpha [1 + i\beta(t/|t|)\tan(\alpha\pi/2)] \end{aligned} \quad (2.1)$$

この式には4つのパラメータが含まれている。第1は、分布の裾の領域の高さの尺度としての α であり、これは特性指数 (characteristic exponent) と呼ばれている。第2は、歪度を表す β である。第3は、スケール・パラメータ γ であり、これはデータのスケールを修正するためのパラメータである。第4は、平均の位置パラメータ δ である。これら4つのパラメータ間の関係であるが、 $\alpha > 1$ のとき、位置パラメータ δ は分布の期待値となる。スケール・パラメータ γ は正の実数であるが、歪度を表す β の値域は $-1 < \beta < 1$ である。 $\beta = 0$ のとき分布は対称で、 $\beta < 0$ では分布は右側に歪み、 $\beta > 0$ では分布は左に歪んでいることを意味する。特性指数 α は分布の両裾における確率を表し、その値域は $0 < \alpha < 2$ である。特性指数 $\alpha = 2$ のとき、安定パレート分布は正規分布に等しくなり、 $0 < \alpha < 2$ の場合には、分布の両端に観察値が出現する確率は正規分布の場合よりも高く、 α が小さいほどその確率は高くなる。このことはきわめて重要な意味を持つ。なぜなら、安定パレート分布においては、有限分散が存在するのは $\alpha = 2$ の場合だけということになるからである（他方、平均は $\alpha > 1$ である限り存在する）。

マンデルブロは、投機的市場における価格の変化が、このような特徴を有する安定パレート分布にしたがうと主張し、綿の価格や利子率、さらには19世紀の株価変動のデータを対象として安定パレート分布のパラメータの推定を行い、 $1 < \alpha < 2$ であるとの分析結果を得た。したがって投機的市場における価格変動の分布においては、平均は存在するが分散に関しては無限大ということになる。

このマンデルブロの指摘は、議論を呼び起こす発端となった。その理由は、証券分析において分散（および標準偏差）はリスクの尺度として不可欠な役割を担っており、もし、マンデルブロの無限分散の主張を受け入れれば、リスクの尺度としての意味がなくなってしまうからである。このため、分析結果が正規分布の仮定に適合したものとなるように、さまざまな修正が施された。その修正は、2つのタイプに類型化できるであろう。第1は、株価変動のうち正規分布に適合する部分と適合しない部分とを区分し、後者を「非確率的」なもののみなして取り扱おうとする修正方法である。第2は、正規分布にしたがう確率変数をいくつか重ね合わせれば、分布の両裾の面積が大きくなりうるという主張にみられるように、統計理論的には論拠に疑問がもたれるような修正を試みるものである。

しかし、株価変動の分布の型についての議論はまもなく等閑に付され、ランダムウォーク仮説の検証ではもっぱら独立性の問題に興味注がれるようになっていった。このランダムウォーク仮説の検証は各国のデータを対象としてさまざまな研究者によって行われたが、それらはいずれも独立性の検証に重点を置いたものであったといつてよい。一方、独立性の検証においても、その条件は緩和された。すなわち、ファマにおいては価格変化が独立で同一の分布をもつことが仮定されていたが、グレンジャー＝モルゲンシュテルン (Granger=Morgenstern) の研究 (1970) においては、価格変化が

同一分布にしたがうことさえ要求されなくなった⁽¹⁶⁾。彼らの研究においては、ランダムウォーク仮説は、価格変動の期待値が一定であること、任意の異なる2つの時点での価格変化の相関がゼロであることによって定義されたのである。

このようにファマの研究以降、もっぱら独立性の検証に焦点が合わされ、しかもオーソドックスな分析が主流を占めるようになったのであるが、例外は、テイラー (Stephen Taylor) の研究であろう⁽¹⁷⁾。彼は、株価をはじめとする金融資産価格収益率の変動特性である、1) 非独立性、2) 非線形性、3) 分散の変動性、を考慮に入れ、非線形条件付分散変動モデルと呼ばれるモデルを考案し、実証分析を行った。彼の提示した方法は、データの特性に沿った方法であり、新たなファクト・ファインディングに貢献している。わが国でもテイラーの方法を用いた実証分析が刈谷武昭氏らによってなされている⁽¹⁸⁾。次節においては、すでに一定の成果を収めているテイラーの方法に立ち入って議論するかわりに、長期のデータを用いてランダムウォーク仮説の検証を行うことを課題とする。

III 時系列分析によるランダムウォーク仮説の検証

本節の課題は、東証株価指数 (以下においては TOPIX と呼ぶ) を対象として、株価の変動がランダムウォーク過程にしたがっているか否かを実証的に考察することにある。このため、分析方法として、時系列分析と呼ばれている方法を用いることにする⁽¹⁹⁾。

時系列分析においては、観察値 x_1, x_2, \dots, x_n は、ある確率法則にしたがう確率変数列 X_1, X_2, \dots, X_n の実現値とみなされる。つまり、観察値 x_1, x_2, \dots, x_n は、同時確率密度関数をもつ n 個の確率変数 X_1, X_2, \dots, X_n の一組の実現値とみなされるのである。このように、ある確率構造で時系列データを発生する確率変数列の数学モデルは確率過程 (stochastic process) と呼ばれている。しかし、経済学ひいては社会科学で取り扱う時系列データは通常、1組しか得られない。したがって、各期ごとに1個の観察値に基づいてその期の期待値や分散、自己相関といった確率過程のパラメータを推定しなければならないという困難に直面することになる。1組の実現値からこれらのパラメータを推定するためには、時系列データの発生メカニズムに何らかの制約を課せばよい。この目的のために課される制約が定常性 (stationarity) にほかならない。

定常性とは、期待値と分散が時間を通じて一定 (しかも有限) であり、かつ2つの時点 t, s における自己相関が、時点そのものではなく、2時点の差のみに依存するという条件である。すなわち、 $X_t; t=1, 2, \dots, n$ という確率過程は、次の条件を満たすならば定常 (弱定常) である。

$$E(X_t) = \mu \quad (3.1)$$

$$E[(X_t - \mu)^2] = \sigma^2 \quad (3.2)$$

$$E[(X_t - \mu)(X_s - \mu)] / \sigma^2 = \rho_{t-s} \quad \text{ただし, } t > s \quad (3.3)$$

このような定常性の条件を満たす確率過程、すなわち定常確率過程においては、 X_t は、不確定な要因のもとで変動しながらも、その平均的水準である $E(X_t)$ の周辺で平衡状態にとどまっていると

みなすことができる。それゆえ、その確率構造の不変性が将来についても仮定されるならば、 X_t の将来の変動が $E(X_t)$ の周辺のどのような範囲にあるかについて、確率的な記述が可能になる。しかし、経済時系列データの場合、原データがそのまま定常性の条件を満たすことは少ない。このため、原データを対数変換したり、階差をとったりすることによって定常化がなされる。このようにある種の変換を行うことによって定常過程になるような過程は、定質非定常過程 (homogeneous non-stationary process) と呼ばれている⁽²⁰⁾。

時系列分析においては、定常過程を対象として、自己回帰モデル、移動平均モデル、あるいはこの2つのモデルを混合した自己回帰移動平均モデルのあてはめを行い、さらにそれを予測に活用するのであるが、ランダムウォーク過程に関連するのは自己回帰モデルである。そこで自己回帰モデルに焦点を合わせてその性質を調べていくことにする。

自己回帰モデルの最も簡単なものは1次の自己回帰モデルである。これは通常はAR(1)と略記され、次式で表すことができる。

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + a_t \quad (3.4)$$

ここで ϕ_1 は自己回帰パラメータであり、他方、 a_t はホワイトノイズと呼ばれ、次のような条件を持つ確率変数である。

$$E(a_t) = 0 \quad (3.5)$$

$$E(a_t a_s) = \begin{cases} \sigma_a^2 & t=s \text{ のとき} \\ 0 & t \neq s \text{ のとき} \end{cases} \quad (3.6)$$

$$E(a_t X_{t-1}) = 0 \quad (3.7)$$

a_t に関しては、しばしばその分布の型が正規であると仮定される。

前述のように、時系列モデルにおいては原データに定常化を施したうえでモデルのあてはめを行うが、その結果(3.4)式のようなモデルがあてはまったとしても、そのモデルによって示される変動が定常であるとはかぎらない。(3.4)式が定常であるためには次のような条件を満たすことが必要である⁽²¹⁾。

$$|\phi_1| < 1 \quad (3.8)$$

自己回帰過程の特徴は長期の記憶を持つことにある。このことは(3.4)式に X_t のラグ変数を次々に代入していくことによって簡単に示すことができる⁽²²⁾。すなわち、 $X_{t-1} = \phi_1 X_{t-2} + a_{t-1}$ を(3.4)式に代入すると、

$$X_t = \phi_1^2 X_{t-2} + a_t + \phi_1 a_{t-1} \quad (3.9)$$

となる。次に、 $X_{t-2} = \phi_1 X_{t-3} + a_{t-2}$ を上式に代入すると、

$$X_t = \phi_1^3 X_{t-3} + a_t + \phi_1 a_{t-1} + \phi_1^2 a_{t-2} \quad (3.10)$$

が得られる。この代入を多数回繰り返していくと、 $|\phi_1| < 1$ であるから、右辺の第1項は無視しうる程度の大きさとなり、次式のように X_t を過去のショックの累積として表すことができるのである。

$$X_t = a_t + \phi_1 a_{t-1} + \phi_1^2 a_{t-2} + \phi_1^3 a_{t-3} + \dots \quad (3.11)$$

このように AR(1)は無限にさかのぼる過去から当期までのランダムショックの和として表現できるのであり、当期の観察値 X_t は遠く隔たった過去のショックの影響を受けていることを示している。

以上のように AR(1)モデルはきわめて簡単なモデルであるが、ランダムウォーク過程はこの AR(1)モデルにおいて $\phi_1 = 1$ となる特殊なケースであり、

$$X_t = X_{t-1} + a_t \quad (3.12)$$

と表される。つまり、その記憶過程は

$$X_t = a_t + a_{t-1} + a_{t-2} + a_{t-3} + \dots \quad (3.13)$$

となって、過去の記憶はいつまでも減衰しない。

現実の時系列がランダムウォーク過程にしたがうか否かを調べるに先だって、時系列の性質を調べる際に重要な役割を果たす自己相関係数について言及しておく。自己相関係数は、分散と共分散との比として定義される。いま、 z_t ($t = 1, \dots, n$) で平均からの偏差を表すことにすると、分散はラグ 0 の自己共分散と同義であるから、これを λ_0 で表記すると、

$$\lambda_0 = \text{Cov}(z_t, z_t) = \text{Var}(z_t) \quad (3.14)$$

となる。また、ラグ 1 の自己共分散 λ_1 は、

$$\lambda_1 = \text{Cov}(z_t, z_{t-1}) = E(z_t z_{t-1}) \quad (3.15)$$

である。(3.4) 式を (3.15) 式に代入し、さらに (3.5) 式の $E(a_t) = 0$ の関係を使うと、

$$\lambda_1 = \phi_1 \text{Var}(z_{t-1}) + \text{Cov}(a_t, z_{t-1}) \quad (3.16)$$

となるが、 a_t と z_{t-1} は独立なので (3.16) 式の第 2 項はゼロとなるから、(3.16) 式は、

$$\lambda_1 = \phi_1 \text{Var}(z_{t-1}) \quad (3.17)$$

となる。さらに、時系列が定常性の条件を満たしていれば、 $\lambda_0 = \text{Var}(z_t) = \text{Var}(z_{t-1})$ だから、(3.17) 式は次式に書き直すことができる。

$$\lambda_1 = \phi_1 \lambda_0 \quad (3.18)$$

同様に、ラグ 2 の自己共分散 λ_2 は、

$$\lambda_2 = \phi_1 \lambda_1 = \phi_1^2 \lambda_0 \quad (3.19)$$

と表され、これをラグ k ($k > 0$) について一般化すると、AR(1)過程の自己共分散は、

$$\lambda_k = \phi_1 \lambda_{k-1} = \phi_1^k \lambda_0 \quad (3.20)$$

で表すことができる。他方、ラグ k の自己相関 ρ_k は

$$\rho_k = \lambda_k / \lambda_0 = \phi_1^k \quad (3.21)$$

と表せる。

以上においてランダムウォーク仮説の検証に用いる時系列分析の要点を述べたので、次に、具体的な分析に進むことにする。

まず、分析の対象とすべき時系列であるが、TOPIX の原系列も他の経済時系列と同様にトレンドをもち、分散も時間とともに増加する傾向があることから、原系列そのものは条件 (3.1) と (3.2) を満たさず、定常ではないと判断される。そこで、株価指数の対数値を考えることにする。いま、株

価指数の原系列を $\{Z_t\}$ で表すことにすれば、ランダムウォークのモデルとして、

$$\ln Z_t = \ln Z_{t-1} + \varepsilon_t \quad t = 1, \dots, n \quad (3.22)$$

を分析対象とする。ここで ε_t は攪乱項である。(3.22) 式は、

$$x_t = \ln Z_t - \ln Z_{t-1} \quad (3.23)$$

とおくと、

$$x_t = \varepsilon_t \quad (3.24)$$

と表せる。ここから、 x_t の系列を調べればランダムウォーク仮説の検証ができることがわかる。ちなみに、この x_t の系列は株価の変化率を表すのであるが、収益率と呼ばれることがあり、ここではこの用語法にしたがって株価収益率と呼ぶことにする。

株価収益率のランダムウォーク仮説を検定するために、最初に、収益率の系列の基本的な統計量を算出し、この系列が正規性を有するか否かを調べることにする⁽²³⁾。株価収益率の基本的な統計量として算出したのは、平均、標準偏差、歪度、尖度である。平均値、標準偏差、歪度、尖度はそれぞれ1次、2次、3次、4次のモーメントであり、日次収益率の観察値を x_1, x_2, \dots, x_n で表すことにすると、平均値 \bar{x} 、標準偏差 s 、歪度 s_k 、尖度 k はそれぞれ次のように定義される。

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_t \quad (3.25) \quad s = \frac{1}{n-1} \sum (x_t - \bar{x}) \quad (3.26)$$

$$s_k = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{\sum (x_t - \bar{x})^3}{s^3} \quad (3.27) \quad k = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{\sum (x_t - \bar{x})^4}{s^4} \quad (3.28)$$

表1 株価収益率データ (全期間) の統計量

	平均	標準偏差	歪度	尖度
日次データ	0.000306**	0.007372	-0.57345**	18.69201**
月次データ	0.007372**	0.058030	-0.34082**	2.93867

注) 数字の右肩に付された** は、1%水準で有意であることを表すが、これは平均の場合には、 $H_0: \bar{x} = 0$ 、歪度に関しては $H_0: S_k = 0$ 、尖度に関しては $H_0: k = 3$ というそれぞれの帰無仮説に対応している。

(資料) 東京証券取引所『東証株価指数』。同『東京証券取引所20年史—規則・統計—』。同『創立30周年記念東京証券取引所資料集—統計編—』。同『東証統計年報』。同『証券統計年報』。同『証券統計月報』。なお、1949年5月～1994年8月の日次データは、東京証券取引所システム開発部から磁気テープによる提供を受けた。

表1に示したのは、分析対象とした全期間について、日次データと月次データを用いて統計量を算出した結果である。 x_t の分布が正規性をもつならば、 $\bar{x} = 0$ 、 $s_k = 0$ 、 $k = 3$ となるはずであるが、はたして収益率の分布は正規性を有するのであろうか。このことを、日次データの分析結果からみていくと、 $\bar{x} = 0$ の帰無仮説は有意水準1%で棄却され、 \bar{x} はプラスの値であることが示された。歪度に関しては $s_k = 0$ の帰無仮説は5%の有意水準で棄却され、日次データの場合の歪度はマイナス、すなわち、分布のピークが右側に偏っていることが示された。他方、尖度は $k = 18.692$ と大幅に $k = 3$ を上回っている。これらのことから、日次収益率の分布は正規性をもたないと結論すべきである

う。他方、月次データの分析結果をみると、 $\bar{x} = 0$ 、 $s_k = 0$ という仮説は棄却されるものの、尖度はほぼ $k = 3$ の水準となっている。また、歪度も日次データに比べると小さい。したがって、日次データ、月次データいずれを用いた場合でも、収益率の系列が正規性をもつという仮説は棄却されるが、日次データに比べると、月次データの方が正規型に近いと判断できよう。

表2には日次データを1000営業日ごとに区分して各期間ごとの統計量を算出した結果を示した(ただし、最後の期間に関しては1215個の観察値が含まれている)。この表を一瞥すれば、収益率の変動特性には期間によってかなりのバラツキがあることがわかる。この表2の分析結果は以下のように要約することができる。①平均値に関して、帰無仮説 $\bar{x} = 0$ が棄却されるのは13の期間のうち5つの期間においてである。また、最後の期間においてのみマイナスの平均値がえられた。これはバブル崩壊後わが国の株価が下がり続けたことを反映しているといえよう。②表1では、全期間についての歪度がマイナスであったのに対して、表2では13の期間のうち歪度がマイナスとなったのは9つの期間においてであり、収益率分布が常にマイナスの歪みをもつわけではないことがわかる。また、歪度の絶対値をとってその大きさを比べると、期間(7)と期間(12)においてきわめて大きな歪度が示された。このことから、この2つの期間においてはマイナス方向でのきわめて大きな外れ値が存在したことがわかる。③歪度の場合と同様に、尖度に関してもその水準のバラツキが大きい。尖度は最小の1.496から最大の37.978まで極端な差がある。④4種類の統計量の算出結果から、13の期間のうち、 x_t

表2 期間別(1000営業日)株価収益率の統計量

	(1)	(2)	(3)	(4)	(4)	(5)	(6)	(7)
$\bar{x} * 10^{-6}$	135	439	573*	346	22	366*	763*	
$S * 10^{-6}$	11405	9345	5672	8105	7639	5516	8308	
S_k	0.399	-0.855	-0.488	-0.511	0.069	-0.782	-2.400	
k	3.156	14.797	3.685	2.626	3.024	4.458	17.666	

	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
$\bar{x} * 10^{-6}$	94	282*	265	951*	411	-499
$S * 10^{-6}$	7766	4141	5324	6108	11884	13154
S_k	-0.224	-0.279	-0.139	-0.314	-2.192	0.525
k	3.435	1.496	5.981	3.593	37.978	5.307

注1) * は有意水準5%で有意であることを表す。

注2) 期間の区分は以下のとおりである。

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| (1) 1949年5月16日～1952年9月6日 | (8) 1972年9月1日～1976年3月4日 |
| (2) 1952年9月8日～1956年1月11日 | (9) 1976年3月5日～1979年8月30日 |
| (3) 1956年1月12日～1959年5月7日 | (10) 1979年8月31日～1983年3月5日 |
| (4) 1959年5月8日～1962年8月28日 | (11) 1983年3月7日～1986年9月2日 |
| (5) 1962年8月29日～1965年12月20日 | (12) 1986年9月3日～1990年6月25日 |
| (6) 1965年12月21日～1969年4月26日 | (13) 1990年6月26日～1995年5月31日 |
| (7) 1969年4月28日～1972年8月31日 | |

(資料) 表1に同じ。

の変動がほぼ正規性をもっているとは判断できるのは期間（5）だけであって、それ以外の期間では正規性を認めることはできない。

以上において、収益率の分布の特性を調べたので、次に、収益率の独立性を検証することにする。この検証のために用いるのは標本自己相関であり、これは次式で定義される。

$$r_{\tau} = \frac{\sum (x_t - \bar{x})(x_{t-\tau} - \bar{x})}{\sum (x_t - \bar{x})^2} \quad (3.29)$$

1949年5月～1995年5月の期間について、日次データと月次データのそれぞれから標本相関係数を算出した結果を表3に示した。表に示したのは $\tau=15$ までである。日次データについての結果からみ

表3 標本自己相関係数

ラグ(τ)	1	2	3	4	5	6	7	8
日次データ	.182*	-.014	.017	.041*	.028*	-.002	-.022*	.004
月次データ	.003	.049	.030	-.003	.059	.010	.057	.011

ラグ(τ)	9	10	11	12	13	14	15
日次データ	.025*	.001	.009	.024*	.012	.008	.027*
月次データ	.049	.022	.045	.015	-.104*	.005	.020

注) *は有意水準5%で有意であることを表す。

(資料) 表1に同じ。

表4 期間別(1000営業日) 株価収益率の自己相関係数

期間	ラグ(τ)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(1)	.268*	-.029	.032	.111*	.071*	.009	-.051	-.007	.039	.010
(2)	.290*	.060	-.019	.026	.035	.032	-.048	-.032	.022	.031
(3)	.216*	.048	.052	.041	.033	.042	-.064	.021	.052	-.043
(4)	.166*	.025	.040	.031	-.011	.020	.023	.050	.041	-.061
(5)	.172*	.042	.054	.010	.054	.047	.039	-.003	-.039	-.039
(6)	.060	.063	.009	.078*	.004	-.006	-.061	.005	.018	.023
(7)	.179*	.004	.028	.034	.053	-.001	-.031	-.023	.010	.045
(8)	.237*	.055	.064	.050	.060	.113*	-.020	-.068	-.016	-.025
(9)	.229*	.046	.030	-.050	-.043	-.040	-.057	-.053	-.018	.017
(10)	.133*	.003	.010	.017	-.042	-.009	-.028	-.036	.004	.036
(11)	.255*	-.032	-.037	.086*	.011	-.085*	-.026	-.006	-.005	-.003
(12)	.080*	-.075*	.043	-.095*	.014	-.010	-.016	.029	.052	.024
(13)	.139*	-.078*	-.029	.096*	.006	-.066*	-.016	.039	.024	-.026

注1) *は有意水準5%で有意であることを表す。

注2) 期間の区分については表2の注を参照されたい。

(資料) 表1に同じ。

ていくと、1次のラグについての自己相関が相対的に高いといえるが、他のラグにおいては自己相関はきわめて小さい。しかし、 $r_r = 0$ を帰無仮説として有意性検定を行うと、高次のラグについての標本自己相関係数の中に有意なものが存在した。ラグが $11 \leq r \leq 30$ の範囲で有意であったのは、12、15、16、17、18、22、27の各次数においてであった。他方、月次データでは、ラグが $1 \leq r \leq 10$ の範囲では有意な標本自己相関は1つもなく、 $10 \leq r \leq 30$ では、 $r=13$ においてのみ有意であった。このことから、日次データ、月次データのいずれにおいても自己相関は全般的に低く、収益率の変動は近似的に独立であるとみなしてよいであろう。しかし、日次データにおいては自己相関係数の中に有意なものがあることから、過去のランダム項の記憶が残っていることは無視しえない。この有意な自己相関は、分析対象とした全期間をいくつかの期間に区分し、それぞれの期間内での自己相関を調べた場合にも依然として存在するのであろうか。

期間を1000営業日ごとに区分して、それぞれの期間内における自己相関係数を計算した結果を示したのが表4である。この表から、期間(6)を除く他の12の期間のすべてにおいて、ラグ1の自己相関が有意であることがわかる。しかし、それ以外のラグでの自己相関で有意なものは少ない。このことから、株価収益率の営業日単位の変動においては、前営業日の記憶がわずかではあるが翌営業日まで残存し、翌営業日の収益率の変動に影響を及ぼしていると結論できるであろう。

IV 株価の変動と長期記憶効果

前節においては、時系列分析によってTOPIXの収益率の時系列がランダムウォークにしたがうか否かを検証し、その結果、収益率の変動は厳密にはランダムウォークにしたがわないことを明らかにした。収益率の変動は非正規的であり、また、そこには過去のランダムショックの影響が残存しているということができるとであろう。それでは収益率はどのような型の分布にしたがい、また、過去のランダムショックの影響はどの程度の期間残るのであろうか。時系列分析の結果は、せいぜい1営業日しか過去の記憶が残らないことを示しているが、はたして過去の記憶はそのような短期間に消失してしまうのであろうか。このことを考えていくうえで時系列分析には限界がある。その理由は、時系列分析は正規分布と線形モデルをベースにした分析方法であり、一方、株価指数の分布は前述のようにその分布が非正規であり、しかも x_t の変動を過去のランダムショックの線形結合として表すことができないからである。 x_t の変動特性を適切にとらえるためには、その分布の型を特定し、さらに過去のランダムショックの影響を把握することのできるモデルを考えることが必要である。

分布の型を特定する問題に関しては、ファマおよびマンデルブロが指摘したように(II節参照)、安定分布がその候補として考えられるであろう。しかし、安定分布に関してはその標本理論が十分に確立されておらず、パラメータの推定には困難が伴う。そこで、以下においては過去のランダムショックの影響を把握する問題に議論を限定し、この問題に新たな光を投ずることができると考えられる

長期記憶効果の概念と計測方法について論ずることとする。

長期記憶効果とは、一見ランダムに見える変動の中に長期間にわたる過去の記憶が潜んでいることに対してマンデルブロが付けた名称であり、その概念と計測方法は、今世紀の前半に活躍したイギリスの水文学者ハースト (H. E. Hurst) の研究に由来している⁽²⁴⁾。ハーストはナイル川の治水の研究にその生涯を捧げた研究者である。彼は下流域に氾濫も枯渇も起こさないような貯水池の貯水量がどのようなものであるかを見いだすことに腐心していた。より具体的にいえば、長期間にわたって平均流量に等しい量の水を毎年放水するためには、貯水池にどれだけの容量が必要とされるかという問題を研究することに没頭していたのである。この問題を定式化するために、彼は次のように考えた⁽²⁵⁾。平均流量=平均放水量を前提とすれば、貯水水準の変動は毎年の流量の平均流量からの差の累計(累積偏差)の変動として表すことができる。いま、ある年次の流量を X_t 、 N 年間における平均流量を M_N とし、 t 年までの累積偏差を $Z_{t,N}$ で表すことにすると、

$$Z_{t,N} = \sum (X_t - M_N) \quad (4.1)$$

と表すことができる。この累積偏差の最大値と最小値をそれぞれ $\max(Z_{t,N})$ 、 $\min(Z_{t,N})$ と表記することにすれば、この最大値と最小値の差、すなわち、累積偏差のレンジ R は、

$$R = \max(Z_{t,N}) - \min(Z_{t,N}) \quad (4.2)$$

で求められるが、ハーストはこの R が必要な貯水容量であると考えたのである。

それでは、この R はどのような変動にしたがうのであろうか。貯水池への流量は各年次の降雨量によって決まるはずであり、降雨量そのものは地形、気温、湿度など多数の要因の影響を受けるから、多自由度をもつ系(システム)の変動として考えることができよう。このように多自由度をもつ系においてはその変動がランダムウォークにしたがう、つまり全くランダムに変動すると仮定することが一般的であろう。もし、降雨量がランダムウォークにしたがうとすれば、累積偏差のレンジ R の変動もランダムウォークにしたがうはずである。ハーストはこのように考えて、さまざまな河川の流量のデータをはじめとしてさまざまな自然現象のデータを収集して、彼の予想が正しいかどうかを検証しようとした。そして彼はこれらのデータの分析結果を比較可能にするために、 R そのものではなく観察値の標準偏差 S で割ることによって規準化を行った。すなわち、 R/S をもって検証にあたったのである。分析結果は彼の予想に反し、自然現象について計測した R/S がランダムウォークにしたがっていないことがわかったのである。そのかわりにハーストは、計測期間と R/S との間に次式に示すような関係があることを発見した。

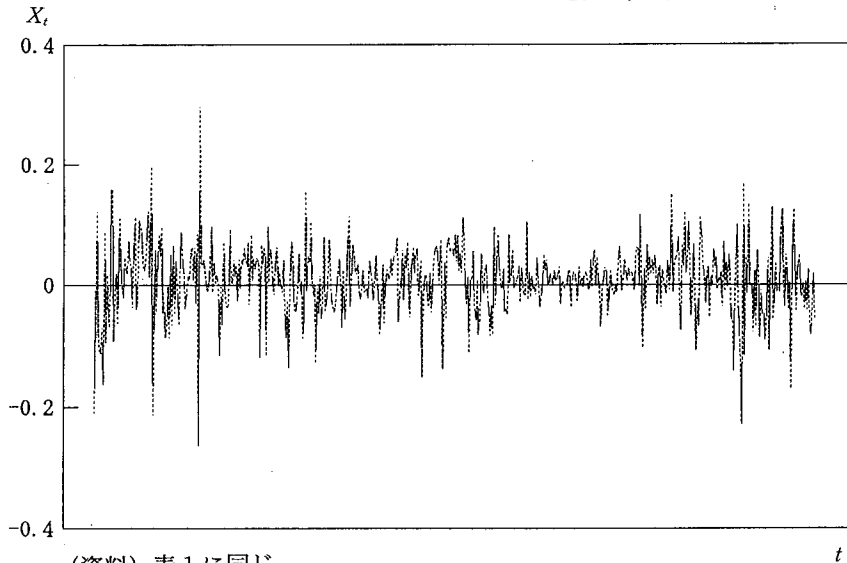
$$R/S = aN^H \quad (4.3)$$

ハーストはシミュレーションを行って、計測対象となった系がランダムウォークにしたがっている場合には $H=0.5$ となり、また、 $H>0.5$ の場合には累積偏差の系列が自己相関をもち、しかも H が大きいほど自己相関が高いことを経験的に示した。

ハーストが考案したこの時系列の分析方法は R/S 解析あるいはスケール変換解析 (rescaled range analysis) と呼ばれている。また、パラメータ H は、後日、マンデルブロによってハースト

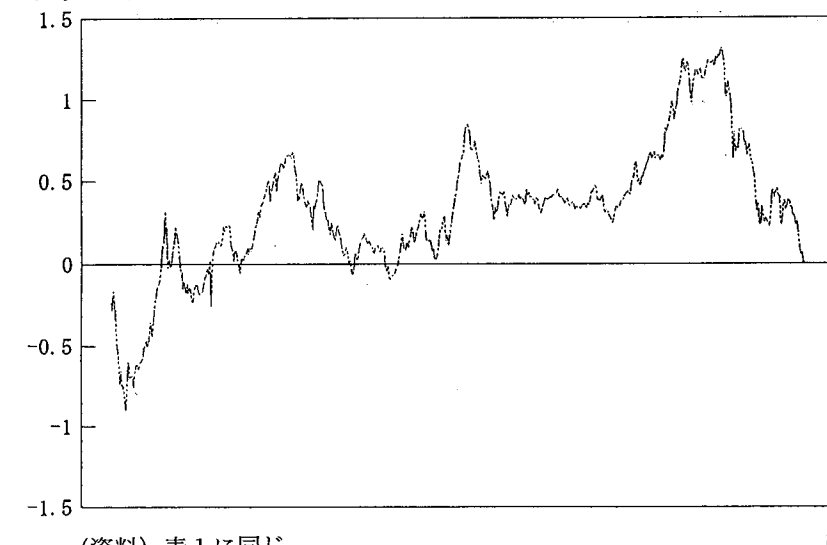
指数と名付けられている。ハーストのこの分析方法の特徴は、ランダムな変動の累積値に注目した点にあるといえる。前節で取り上げた時系列分析を引き合いに出すならば、 $X_t - M_N$ はこれ以上の変換を施さなくても定常的な振る舞いをするはずであり、 $X_t - M_N$ の自己相関等の統計量を調べることで分析を終えてしまうのが時系列分析の一般的なパターンであろう。これに対してハーストは累積偏

図1 月次収益率の時系列 1949年5月～1995年5月



(資料) 表1に同じ。

図2 月次収益率の偏差の累積和 $\Sigma(X_t - M_n)$ の変動
1949年5月～1995年5月



(資料) 表1に同じ。

差, すなわち $\Sigma (X_t - M_N)$ に着目したのであって, これは過去のランダムショックの累積がどのような振る舞いをするかということに注目したことに他ならない。本節において R/S 解析を取り上げた理由は, この分析方法をもってすれば, 過去のランダムショックの微細な影響を明示的に把握できると考えるからである。前節で行った分析によって, 株価指数の変動には過去のランダムショックの影響が及んでいることを明らかにしたが, 時系列分析をもってしてはこうした影響を適切に評価することに限界があった。この点において R/S 解析は別の視点をわれわれに提供することが可能であると考えられるのである。ちなみに, 図1には TOPIX の月次収益率 x_t の変動を示し, また, 図2には $\Sigma(x_t - M_N)$ の系列を図示した。図2に示されたようなランダムショックの累積値の分析が以下の課題である。

以下においては, TOPIX の日次データおよび月次データを用いて, 株価収益率にこの R/S 解析を適用する。分析対象とするのは (3.23) 式で定義した,

$$x_t = \ln Z_t - \ln Z_{t-1}$$

の系列である。 R/S 解析の具体的な方法であるが, まず, 分析対象となる時系列が明らかに非定常である場合には, なんらかの変換を行って, 近似的に定常な状態にしておくことが必要である。ここで分析対象とする x_t の系列はトレンドをもたないので, あらためて変換を行う必要はないと考えられる。

次に, (4.3) 式の両辺の対数をとった次式のパラメータの推定を行う。

$$\log(R/S) = \log a + H \log N \quad (4.4)$$

R と S はそれぞれデータの長さ N に応じた期間内のデータについて算出する。たとえば, 13000個の観察値からなる日次データを例にとるならば, $N=100$ 営業日とするとき, 合計130個の区間に分けられることになるが, この130個の区間のそれぞれにおいて R/S を計算する。そして130個の R/S の平均を求め, この平均値をもって $N=100$ における R/S とする。そして両対数グラフの $\log 100$ に対応する箇所に $\log(R/S)$ の値をプロットする。同様の作業を N が全期間の半分の長さに至るまで順次続けていき, 両対数図上にプロットされた $\log(R/S)$ の値に最小2乗法によって直線のあてはめを行い, あてはめられた直線の勾配をもってハースト指数 H の推定値とするのである。

日次データを用いてスケール変換解析を行う場合, N を1つずつ増やしていった R/S の値を求めようとするとかかなりの計算量が必要であり, 月次データの場合でさえ, 作業には多くの計算時間を必要とする。そこで, 日次データについては, きわめて大まかではあるが1年間の営業日数を250日として, $N=250$ からはじめて N の値を250ずつ増やして $N=2500$ までの合計10個の N に対応する R/S を計算し, これらの R/S の値に回帰分析を行って H を推定するという方法を採用ことにした。同様に, 月別データについても, $N=10$ からはじめて $N=100$ まで10ずつ N の値を増やしていき, 合計10個の R/S を求め, これに基づいて月次収益率の H の推定値を計算することにした。

図3と表5に日次収益率についてのスケール変換解析の分析結果を掲げた。同図には, $N=250$ から $N=2500$ に対応して計算された10個の $\log(R/S)$ の値にあてはめた回帰直線もあわせて表示して

図3 日次収益率のスケール変換解析

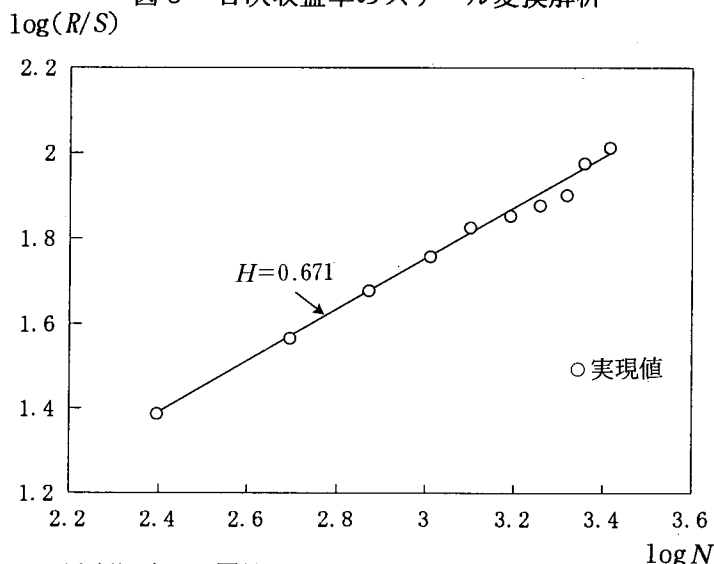


図4 月次収益率のスケール変換解析

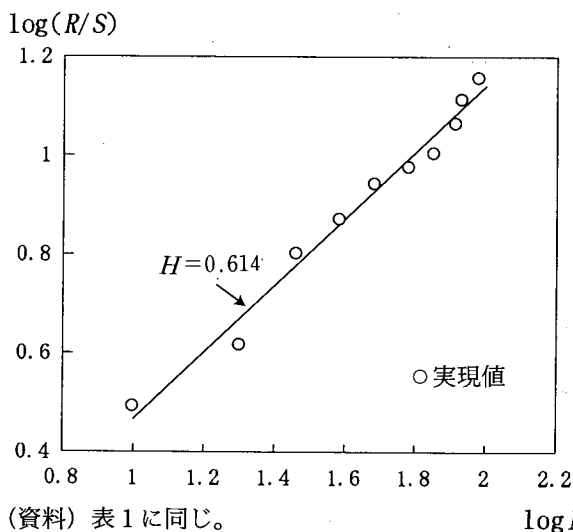


表5 日次収益率のスケール変換解析

N	$\log N$	R/S	$\log(R/S)$
250	2.3979	23.9838	1.3799
500	2.6990	36.0186	1.5565
750	2.8751	47.7573	1.6790
1000	3.0000	55.7512	1.7462
1250	3.0969	65.6412	1.8172
1500	3.1761	70.4892	1.8481
1750	3.2430	74.7407	1.8736
2000	3.3010	80.1801	1.9041
2250	3.3522	96.7783	1.9858
2500	3.3979	102.3338	2.0100

(資料) 表1に同じ。

ある。この回帰直線の勾配がハースト指数 H の推定値である。この図に示したように、日次収益率に関して推定されたハースト指数の値は $H=0.614$ であり、決定係数は $R^2=0.993$ である。えられた H の解釈であるが、ラグ k の自己相関関数を $C(k)$ で表すことにすると、 $C(k)$ と H の間には次の関係があることが指摘されている⁽²⁶⁾。

$$C(k) = \frac{E[(X_t - X_{t-k})(X_{t+k} - X_t)]}{E(X_t^2) = 2^{2H-1} - 1} \quad (4.5)$$

この式に $H=0.614$ を代入して C を求めると、 $C=0.171$ がえられる。すなわち、日次収益率の系列

は、 $C=0.171$ の低い自己相関をもち続けるということである。それではどの程度の期間この自己相関をもち続けるかということであるが、この持続期間 k については図から判断せざるをえない。図3をみると、 $N=1500$ 日に対応する $\log(R/S)$ の値まではほぼ回帰線上に位置しているが、 $N=1750$ からは回帰線との乖離がはじまる。したがって $N \leq 1500$ 日の期間においては自己相関が持続し、 $N > 1500$ 日ではこの自己相関は失われてしまうと想像される。つまり、 $k < 1500$ 営業日と推測されるのである。証券取引所においては以前は土曜日の取引が行われていたために、1年間の営業日数が土曜日の取引が行われた期間と行われ

表6 月次収益率のスケール変換解析

N	$\log N$	R/S	$\log(R/S)$
10	1.0000	3.0140	0.4791
20	1.3010	4.1764	0.6208
30	1.4771	6.4986	0.8128
40	1.6021	7.3945	0.8689
50	1.6990	8.6800	0.9385
60	1.7782	9.3649	0.9715
70	1.8451	10.0595	1.0026
80	1.9031	11.4214	1.0577
90	1.9542	12.8163	1.1078
100	2.0000	14.4261	1.1591

(資料) 表1に同じ。

なくなった期間とでは大幅に異なるが、年間取引日数を250日とすれば $N=1500$ 日では約6年間、 $N=300$ 日とすれば約5年間、自己相関が持続するということになる。換言すれば、収益率の変動には5年～6年間、長期記憶効果が残存すると推測されるのである。

次に、月次収益率についてのスケール変換解析の結果を示したのが図4と表6である。図4から、月次収益率のハースト指数は $H=0.671$ と推定されることがわかる。この値を上式に代入して C を求めると、 $C=0.268$ と推定された。したがって、月次収益率の方が日次収益率よりも自己相関は高いということになるが、図3と図4を比較すると、図4の方が回帰線の適合度が若干低くなっている。また、自己相関の持続期間については、図4からは明確な判断を行うことは困難である。

最後に、 $H > 0.5$ が時系列の変動の仕方に対して持つ意味について考えてみることにする。フェダー (J. Feder) は、経過時間 N と N に対応する R/S との間に次式に示すような比例関係があることを指摘している⁽²⁷⁾。

$$R(N)/S \propto N^H \tag{4.6}$$

II節においてオズボーンの所説を取り上げた際に、彼が、時系列がランダムウォークにしたがっていれば、標準偏差は期間の長さの平方根に比例して大きくなることを指摘していたことにふれたが、このオズボーンの指摘と(4.6)式は共通点をもっている。すなわち、ランダムウォーク過程の場合、 $H=0.5$ となるから、このとき(4.6)式は

$$R(N)/S \propto \sqrt{N} \tag{4.7}$$

となり、レンジ R と期間 N との間にも、標準偏差と期間の長さの間にみられる比例関係が成り立つことがわかる。そして、 $H > 0.5$ では、

$$N^H > \sqrt{N} \tag{4.8}$$

となり、 R はランダムウォークの場合よりも大きくなるのが容易に理解できる。つまり、 $H > 0.5$ となるような時系列においては、過去の記憶が長期間にわたって残存するために、時系列の変動の振

れがランダムウォーク過程の場合よりも大きくなるといえるのである。時系列の振れが大きくなる原因としては、長期記憶効果の残存期間に一種のトレンドが現れることが考えられる。すなわち、株価の変動は必ずしも上昇と下落を規則正しく繰り返すわけではなく、上昇傾向や下落傾向がしばらくの間継続することは実際に観察される。こうした一方方向への変動が累積されることによって、累積偏差である R が $H > 0.5$ の場合には、ランダムウォーク過程の場合よりも大きな値をとることになるといえるのである。

V. むすび

本稿においては、TOPIX から求められた株価収益率の時系列を対象として、ランダムウォーク仮説の検証を行うことを課題とした。このために、はじめにII節において、ランダムウォーク仮説そのものもつ意味について再検討を行った。その結果、従来の研究においても厳密な意味でのランダムウォークは観察されず、株価収益率は近似的に独立に変動しているにすぎないことが認識されていたことが明らかとなった。また、収益率の分布の型についても、当初は正規分布が仮定されていたが、実証分析によってその仮定が否定されるにしたがい、分布の型については次第に緩やかな仮定がなされるようになった。そうしたなかで、株価変動の分布に関して独自の視点を打ち出したのはマンデルブロであったといえる。彼は安定分布を株価の変動に適用しようとしたのであった。しかし、残念なことに、彼の主張はほとんど無視されたまま今日にいたっている。株価と安定分布の関係について再検討を試みる研究者が出現することを期待したい。

III節においては、46年間の TOPIX の収益率のデータを対象としてランダムウォーク仮説の検証を行った。この検証作業においては、最初に、収益率の分布が正規型であるかどうかについて仮説検定を行った。その結果、収益率の分布が正規型であるという帰無仮説は棄却された。次に、独立性の検証を行い、日次収益率、月次収益率のいずれにおいても自己相関は全般的に低く、収益率の変動は近似的に独立であるとみなすことも可能であるとの指摘を行った。しかし、日次データにおいては自己相関係数の推定値のなかに有意なものが存在するのであり、過去のランダム項の記憶が残っていることを無視することはできない。この有意な自己相関は、分析対象とした全期間をいくつかの期間に区分し、各期間内での自己相関を調べた場合には、大部分の期間ではラグ $\tau = 1$ においてのみ確認された。

以上のような検証によって、収益率の時系列には低い相関があることが明らかとなったが、従来型の時系列分析をもってしては、この相関がどの程度の期間持続性をもつのかという点に関して十分な分析を行うことができないと考えられる。そこで、ハーストが考案したスケール変換解析を収益率の時系列に対して行うことにした。スケール変換解析は長期の記憶効果を測定するための方法であり、この解析によって推定されたハースト指数が $H = 0.5$ の場合には当該の時系列はランダムウォークにしたがい、 $H > 0.5$ ならば長期の記憶効果をもつと判断される。日次収益率の時系列にこの解析を適

用すると、ハースト指数の推定値として $H=0.614$ がえられ、また、月次収益率については $H=0.671$ がえられた。いずれの場合にも $H>0.5$ であるから、収益率の時系列は長期の記憶効果を有すると結論できる。また、この記憶効果の持続期間は1500営業日程度であると推測された。

別稿においてスケール変換解析の理論的側面についての検討を行ったために、本稿ではこの点についての議論を行わなかったが、長期記憶効果の意味を考えるためには理論面での検討が必要であろう⁽²⁸⁾。マンデルブロはこの問題について、非整数ブラウン運動 (fractional Brownian motion) の理論を提示し、興味深い議論を行っている⁽²⁹⁾。マンデルブロの研究に端を発するこの理論の研究がより深化することを期待したい。

(注)

- (1) Malkiel, B. G., *A Random Walk Down Wall Street*, W. W. Norton, New York, 1990. (井手正介訳『ウォール街のランダム・ウォーク』日本経済新聞社, 1993年。)
- (2) Fama, E., *Foundations of Finance*, Basic Books, New York, 1976, pp. 133-137. 丸淳子・首藤恵・小峰みどり『現代証券市場分析』東洋経済新報社, 1986年, 150-151頁。
- (3) 3種類の効率的市場仮説については、次の文献を参照されたい。若杉敬明・紺谷典子「効率的市場仮説：理論と実証」若杉敬明編『会計情報と資本市場』ビジネス教育出版社, 1984年, 128-135頁。丸淳子他, 前掲書, 152-161頁。
- (4) Bachelier, L., "Theory of speculation", in Cootner, P. H., ed., *The Random Character of Stock Market Prices*, MIT Press, Cambridge MA, 1964, pp. 17-18.
- (5) ブラウン運動については、次の文献が良書である。米沢富美子『ブラウン運動』共立出版, 1986年。
- (6) Osborne, M. F. M., "Brownian motion in the stock market", in Cootner, P. H., ed., op. cit., pp. 101-110.
- (7) Peters, E. E., *Chaos and Order in the Capital Markets*, Jhon Wiley & Sons, New York, 1991, p. 17. (拙訳『カオスと資本市場』白桃書房, 1994年, 20頁。)
- (8) Osborne, M. F. M., op. cit., pp. 104-106.
- (9) Fama, E. F., "The Behavior of stock market prices", *Journal of Business*, 1965. vol. 38, p. 35.
- (10) Ibid., p. 90.
- (11) 丸淳子・首藤恵・小峰みどり, 前掲書, 152-156頁。
- (12) Fama, E. F., "The Behavior of stock market prices", p. 41.
- (13) Fama, E. F., "The Behavior of stock market prices", p. 41.
- (14) Moore, A. B., "Some characteristics of changes in common stock market prices", in Cootner, P. H., ed., op. cit., pp. 139-161. Kendall, M. G., "The Analysis of economic time series", *Journal of Royal Statistical Society*, vol. 96, Part I, 1953, pp. 11-25. Alexander, S., "Price movements in speculative markets: trends or random walks", *Industrial Management Review*, vol. 2, no. 2, 1961, pp. 7-26.
- (15) Mandelbrot, B., "The variation of certain speculative prices", *Journal of Business*, vol. 36, no. 4, 1963, p. 397.
- (16) Granger, C. W. J. and Morgenstern, O., *Predictability of Stock Market Prices*, Heath, Lexington MA, 1970.
- (17) Taylor, S., *Modelling Financial Time Series*, Jhon Wiley & Sons, New York, 1986, pp. 8-10. (新日本証券/新日本証券調査センター訳『金融先物・オプションの価格変動分析』東洋経済新報社, 1988

年、8-10頁)において、各国の市場を対象として行われたランダムウォーク仮説についての検証作業の紹介がなされている。

- (18) 刈谷武昭・佃良彦・丸淳子編著『日本の株価変動：ボラティリティ変動モデルによる分析』東洋経済新報社，1989年。
- (19) 時系列分析に関する以下の説明は、次の文献に依拠した。Vandaele, W., *Applied Time Series and Box-Jenkins Models*, Academic Press, San Diego CA, 1983. (蓑谷千凰彦・廣松毅訳『時系列入門』多賀出版，1988年。) 山本拓『経済時系列分析』創文社，1988年。高森寛「経済データの時系列分析と予測(1)」『オペレーションズ・リサーチ』vol. 29, no. 2, 105-110頁。溝口敏行・刈谷武昭『経済時系列分析入門』日本経済新聞社，1983年。
- (20) 高森寛，前掲論文，106頁。
- (21) Vandaele, W., op. cit., pp. 34-35 (蓑谷千凰彦・廣松毅，前掲訳書，37-38頁)には，定常性の条件を満たすために自己回帰パラメータに課せられる制約が要領よく説明されている。
- (22) Vandaele, W., op. cit., pp. 36-37. (蓑谷千凰彦・廣松毅，前掲訳書，39-41頁。)
- (23) 以下の分析の手順は，刈谷武昭・佃良彦・丸淳子編著，前掲書，20-25頁，を参照した。
- (24) Hurst, H. E., "Long-term storage capacity of reservoirs", *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, vol. 116, 1951. pp. 770-808.
- (25) 以下の説明は，次の文献による。Feder, J., *Fractals*, Plenum Press, New York, 1988, pp. 149-162. (松下貢・早川美徳・佐藤信一訳『フラクタル』啓学出版，1991年，158-171頁。) 拙稿「フラクタル理論の経済時系列分析への応用」『政経論叢』第63巻第1号，1995年，123-129頁。
- (26) Peters, E. E., "Fractal structure in the capital markets", *Financial Analysts Journal*, July-August 1989, p. 34. 前掲拙稿，120頁。
- (27) Feder, J., op. cit., p. 178.
- (28) 前掲拙稿，115-123頁。
- (29) Mandelbrot, B., *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman and Co., New York, 1977, pp. 247-255. (広中平祐監訳『フラクタル幾何学』日経サイエンス社，1985年，247-255頁。)

(にった いさお)

東証株価指数 (TOPIX) と一株当たり利益による 伝達関数モデルの構築

森 久

Modelling the Transfer Function Relationship between EPS and Industry Index (TOPIX)

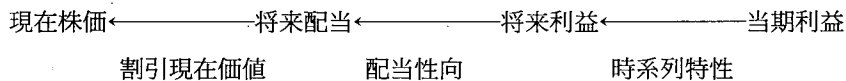
Hisashi MORI

1. はじめに

時系列分析の意義は、一般に、予測にあるとされている。また、利益情報の重要性のゆえに、利益が予測の対象であることが多い。利益予測が必要とされる理由についての説明は、たとえば Beaver の所説のなかにみられる。Beaver は、当期利益と現在株価との関連のなかに時系列分析による利益予測を位置づけているのである。

桜井は、Beaver による当期利益と現在株価との関連づけをつぎのように図式化している。この図から分かるように、Beaver は、当期利益と現在株価との間に将来利益と将来配当を介在させ、a.

図表1 当期利益と現在株価との関連



出所：桜井 (1991), 78ページ

当期利益と将来利益との結びつき、b. 将来利益と将来配当との結びつき、c. 将来配当と現在株価との結びつきという三つの結びつきにより、当期利益と現在株価を関連づけるのである [Beaver (1989), p.90および『訳書』127ページ]。

この一連の関連のなかで、当期利益と将来利益との結びつきは、利益の時系列特性によって規定される [桜井 (1991), 79ページ]。「過去の利益と将来の利益との関係は、利益の時系列パターンを記述すると思われる確率過程によって表される。」 [Beaver (1989), p.91および『訳書』129ページ] のである。したがって、将来利益を予測するために当期と過去の利益の時系列的な分析が必要とされているといえる。そして、実際、単回帰分析、重回帰分析からボックス=ジェンキンス法、ファジー時系列分析まで多くの時系列手法により予測が試みられているのである。

それでは、現在株価と将来利益はどのように結びつくのであろうか。

まず、図の左側の現在株価と将来配当との結びつきからみてみよう。Beaverによれば、株式の価格は将来配当にたいする投資家の期待に依存しているという [Beaver (1989), p.89および『訳書』127-128ページ]。したがって、たとえば現在の株価が将来の期待配当額に比例するものとする、時点 t 現在における株式価格 P_t はつぎのように表現される [Beaver (1989), p.96および『訳書』134ページ]。

$$P_t = \rho E_t(D) \quad (1)$$

ここで、 $E_t(D)$ は時点 t で形成された将来の配当 D についての期待値、 ρ は比例度である。

つぎに、将来配当と将来利益とを結びつけるものは、配当性向である。Beaverによれば、「もっとも一般的で単純な仮定の一つは、将来の利益と将来の配当が一定の配当性向を通じてリンクしているというものである」 [Beaver (1989), p.91および『訳書』129ページ] という。そして、もし配当性向が一定であれば、将来利益額にもとづいて将来配当額を計算しうるのである。

一定の配当性向により将来配当と将来利益を結びつけると、つぎのように表現できる [桜井 (1991), 79ページ]。

$$E_t(D) = K E_t(X) \quad (2)$$

ここで、 $E_t(D)$ は時点 t において形成された将来の配当 D についての期待値、 $E_t(X)$ は時点 t で形成された将来の利益 X についての期待値、 K は定数で、利益に占める配当の割合すなわち一定の配当性向を示す。

この (2) 式を (1) 式に代入すると、現在株価と将来利益を結びつける式がえられる [桜井 (1991), 79ページ]。

$$P_t = \rho K E_t(X) \quad (3)$$

この式は、一定の配当性向にもとづいて将来利益額から将来配当額を計算でき、その将来配当額に一定の比例度を乗じて現在株価を算出できるということを表している。

現在株価と将来利益はこのように結びついている。本稿は、この結びつきを時系列モデルとして構築することを目的としている。従来は将来利益と現在利益との結びつきについて時系列モデルとして明らかにすることが行なわれてきた。しかし本稿は、時系列分析の手法を使用して、現在株価と将来利益との結びつきを明らかにすることを試みる⁽¹⁾。このことに成功するならば、現在株価を判断するうえで将来利益の予測が重要であるということを裏づけることになるであろう。

しかしながら、株価を形成するために用いられた将来利益を時系列的に把握することは不可能である。どのような予測利益にもとづいて株価が形成されたかを明らかにするためには、各時点での何期かの予測利益を確定しなければならない。しかも、株価形成に役立った将来利益でなければならない。そしてそれは、決算短信、『会社四季報』、『日経会社情報』に掲載されているものとは限らないのである。そこで本研究では、株価形成時点の将来利益ではなく、実績利益を用いることにする。株価と実績利益との相関を時系列的に分析し、株価が実績利益よりも先行しているならば、株価は将来

利益を予測して形成されていると解釈するのである。この場合、実績利益は予測利益と一致していると仮定される。

また、特定の企業の株価と利益とにより時系列モデルを構築するわけではない。本研究で採用したものと同一時系列手法を利用した研究⁽²⁾が存在しており、そこにおいては、特定の企業の利益を予測するために、一般に業績の先行指標とされている株価の代表として、Standard and Poor's (S & P)社の全銘柄指数や業種別指数を導入している。そこで本研究でも、将来の利益予測モデルの構築をも考慮して、(株)日立製作所一株当り半期利益と、電気機器業の東証株価指数(TOPIX)とを用いて時系列モデルを構築することにする。したがって、本稿で取りあげる株価と利益との結びつきは、特定企業の実績利益としての半期利益とその企業が属する業種別株価指数との結びつきである。

さらに、取りあげたのは(株)日立製作所1社だけであるので、その結論を普遍性のあるものとするわけにはいかない。電気機器業について一応の結論をえるためには、少なくとも数社の分析をする必要があるだろう。本研究は、今後の本格的な分析のために、モデル構築の方法を確認するという性格が強いものに止まらざるをえない。

本稿においては、まず第2節において、使用する時系列モデルである多変量時系列モデルあるいは伝達関数モデルとよばれるモデルについてまとめることにする。第3節においては、その構築方法について説明する。第4節では、使用データを明らかにする。そして第5節においては、統計処理アプリケーションソフト「SAS」を使用して、現在株価と将来利益とを結びつけた伝達関数モデルとよばれる多変量時系列モデルを構築する。最後の第6節においては、モデルの構築により発見された点を要約することにより本研究の意義を明らかにし、本稿のむすびとする。

注

- (1) もちろん現在株価と現在利益も結びついている。Beaverによれば、現在株価が当期利益の変化に対応してどのように変化するかは、当期利益の変化のうち恒久的要素がどの程度であるかにより異なってくるという [Beaver (1989), p.97および『訳書』135-136ページ]。そして、もし利益変動がすべて恒久的なものであるとすると、将来の期待利益 $E_t(X)$ は当期の利益 X_t と等しくなり、つぎのように表現される [桜井 (1991), 81ページ]。

$$E_t(X) = X_t$$

この式を(3)式に代入すると、現在株価が当期利益に比例していることを示すつぎのような式がえられる [桜井 (1991), 81ページ]。

$$P_t = \rho K X_t$$

ただし、Beaverは、一般にはそのような単純な関係など存在しないだろうとも述べている [Beaver (1989), p.98および『訳書』136-137ページ]。

- (2) Hopwood, W. S., The Transfer Function Relationship Between Earnings and Market-Industry Indices: An Empirical Study, Journal of Accounting Research (Spring 1980), pp.77-90.

2. 伝達関数モデルの導出

本節においては、Vandaele (1983) にしたがって、本研究で使用する時系列モデルである多変量時系列モデルについて説明する。これは伝達関数モデルともよばれるモデルであり、その必要性と数学的表現をみていくことにする。

説明の便宜上1変量時系列モデルから取りあげる。

まず、原データが非定常な時系列であるならば、なんらかの方法でそれを定常の時系列データに変換しなければならない。その変換によって、第一に分散を安定化し、第二にトレンドを除去し、第三に季節的要因を除去しなければならない。分散を安定化するためには、原データを対数変換あるいは平方根変換して、 Z_t を得る。この段階を経たデータは定質非定常過程にあるといわれる。そして、トレンドを除去するために、 Z_t の階差をとって新たな時系列を得る。最後に、季節的要因を除去するために、前年同期との差分をとって、季節変動調整後の時系列を得る（これ以降は、説明の便宜上、季節性の問題を無視する）。この結果、ようやく定常化した系列 z_t が得られ、これが時系列分析の対象となる。

そして、定常時系列 z_t が p つぎの混合自己回帰移動平均 (mixed autoregressive moving average, 略して ARMA) モデルにあてはめられる。

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \dots + \phi_p z_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

本研究で使用する時系列モデル構築手法であるボックス=ジェンキンス法 (B=J法) は、定質非定常過程を出発点として混合自己回帰移動平均モデルを構築する⁽¹⁾。そしてその結果は、ARIMA (p, d, q) と表現される。ここで、

d = 定質非定常過程を定常過程に変換するのに必要な階差の数

p = 自己回帰 (AR) 部分の次数

q = 移動平均 (MA) 部分の次数

である。もちろん、パラメータの推定値をつけたかたちでも表現される。

ところが、特定の時系列データにたいしては、多くの影響要因が存在しているはずである。「実際には、多くの事象が、モデルを特定化して推定しそれにもとづいて将来を予測しようとする時系列データに系統的に影響を与えている」[Vandaele (1983), p.258および『訳書』275ページ] ののである。したがって、予測モデルとしては1変量時系列モデルでは不十分であると推測される。そこで、「2つ以上の時系列データを同時に考えてシステムの動学的特性を明示的に導入する予測モデルを作り上げなければならない。」[Vandaele (1983), p.258および『訳書』275ページ] ということになる。こうして構築されるモデルが、多変量時系列モデル (multiple time series model) あるいは伝達関数モデル (transfer function model) とよばれる。

この伝達関数モデルにおいては、分析対象とされる特定の時系列データが従属変数、その動きを説明するために導入される時系列データが説明変数とよばれる [Vandaele (1983), p.258および『訳書』275ページ]。伝達関数モデルは、一般的につきのように表現される [Vandaele (1983), pp.260および『訳書』279ページ]。

$$Y_t = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} X_{t-b} + e_t$$

ここで、Bはラグ演算子であり、

$$\omega(B) = \omega_0 - \omega_1 B - \dots - \omega_r B^r$$

$$\delta(B) = \delta_0 - \delta_1 B - \dots - \delta_r B^r$$

である。またbは、無効期間、すなわち X_t の変化が Y_t に変化をもたらすまでにかかる期間である。そして、「一般性を失うことなく δ_0 を1に規準化することができる。」ので、両辺に $\delta(B)$ を乗じると、

$$\delta(B) Y_t = \omega(B) X_{t-b} + \varepsilon_t$$

となる(ただし、 $\varepsilon_t = \delta(B) e_t$)。したがって、伝達関数モデルは、つぎのように表現できることになる [Vandaele (1983), p.261および『訳書』279ページ]。

$$Y_t = \delta_1 Y_{t-1} + \dots + \delta_r Y_{t-r} + \omega_0 X_{t-b} - \omega_1 X_{t-b-1} - \dots - \omega_r X_{t-b-r} + \varepsilon_t$$

ところが、定常な従属変数と定常な説明変数を使って伝達関数を構築することが普通であり、しかも、「事前に各変数に定常化変換を施した後では、……誤差項が、いかなる階差演算子も含まない単純なARMA(p, q)過程となる可能性はかなり高い。」という [Vandaele (1983), p.261および『訳書』280ページ]。そこで、一般的な伝達関数モデルは、つぎのように示されることになる [Vandaele (1983), p.261および『訳書』280ページ]。

$$y_t = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} x_{t-b} + \frac{\theta(B)}{\phi(B)} a_t \quad (4)$$

ここで、 y_t は Y_t の、 x_t は X_t の階差をとったものである。また、誤差項はARIMAモデルで表現されることになる。その結果、たとえば、 $(b, 1, r)^{(2)} \times (p, d, q) = (0, 1, 0) \times (0, 1, 0)$ というように伝達関数モデルを同定し、パラメータを推定し、診断チェックを実施する。そしてさらに、そのモデルにもとづいて予測が試みられることになる。

注

(1) 移動平均部分が存在しない場合にはつぎのような自己回帰 (autoregressive, 略してAR) モデルとなる。

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \dots + \phi_p z_{t-p} + a_t$$

また、自己回帰部分が存在しない場合には、つぎのような移動平均 (moving average, 略してMA) モデルとなる。

$$z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

(2) いくつかの (b, 1, r) モデルを式により表現すると、つぎのようになる。

$$(2, 1, 0) \quad y_t = (\omega_0 - \omega_1 B) x_{t-2} + a_t$$

$$(2, 2, 0) \quad y_t = (\omega_0 - \omega_1 B - \omega_2 B^2) x_{t-2} + a_t$$

$$(2, 0, 1) \quad y_t = \frac{\omega_0}{1 - \delta_1 B} x_{t-2} + a_t$$

$$(2, 0, 2) \quad y_t = \frac{\omega_0}{1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2} x_{t-2} + a_t$$

$$(2, 1, 2) \quad y_t = \frac{\omega_0 - \omega_1 B}{1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2} x_{t-2} + a_t$$

さらに、直上の (2, 1, 2) を別のかたちで表現すると、つぎのようになる。

$$y_t = \delta_1 y_{t-1} + \delta_2 y_{t-2} + \omega_0 x_{t-2} - \omega_1 x_{t-2-1} + a_t$$

この式は、従属変数 y_t が、それ自体の 1 期前と 2 期前のデータに規定されているだけでなく、その先行指標となっている説明変数 x_t の 2 期前と 3 期前のデータにも規定されていることを示している。

3. 伝達関数モデルの構築方法

本節においては、Vandaele (1983) の説明にもとづいて⁽¹⁾、伝達関数モデルの構築方法を明らかにする。

まず、時系列分析をするためには時系列データに定常性がなければならず、「通常は、定常な従属変数と定常な説明変数を使って伝達関数を構築する」[Vandaele (1983), p.261 および『訳書』280 ページ] ことになる。そこで、1 変量時系列モデルの場合と同様に、まず分散を安定化しトレンドを除去しなければならない (季節性があればさらにそれも除かなければならない)。したがって、こうした手続きをつぎのように第一段階、第二段階としてまとめることができる。

第一段階 分散の安定化

分散が一定でない場合には、分散を安定化するために、原データの対数変換あるいは平方根変換をする。具体的には、原データ、対数変換したデータ、平方根変換したデータを図にしてみるとともに、それらデータの 1 階の差分をとってみて、その図が期間を通じて平均値を中心にして一定幅の間にあることにより、適切な変換を判断する。この段階を経ることにより、定質非定常過程である時系列データがえられる。

第二段階 トrendの除去

トレンドが存在する場合には、トレンドを除去するために階差をとり、定常過程である z_t を得る (本稿では、季節性の問題は取りあげない)。具体的には、階差 0 ~ 2 の 3 ケースについて計算してみて、そのプロット図が期間を通じて平均値を中心にして一定幅の間にあるもの、その自己相関関数が急速にゼロに収束していくもの、また残差系列がホワイトノイズである確率の高いもの、とくに後 2 者を見て適切な階差を判断する。なお、ホワイトノイズである確率は、いく

つかのラグまでを全体として評価するものであり、SASではPROBで示されている。

こうした二つの段階を経ることにより、説明変数と従属変数が定常化されたので、つぎに、プリホワイトニングをする⁽²⁾。プリホワイトニングとは、事前にそれぞれの系列のデータから自己相関をできるだけ除去することである。言い換えるならば、プリホワイトニングとは、まず、それぞれの時系列データに自己回帰モデルをあてはめ、その残差を得ることである [Vandaele (1983), p.286および『訳書』306ページ]。たとえば、 y_t と x_t がAR(2)に従うとすると、それぞれつぎのように表現することができる。

$$y_t = \phi_{y1} y_{t-1} + \phi_{y2} y_{t-2} + e_t$$

$$x_t = \phi_{x1} x_{t-1} + \phi_{x2} x_{t-2} + u_t$$

ここで、 e_t と u_t がプリホワイトニングされたデータである [Vandaele (1983), p.287および『訳書』307ページ]。プリホワイトニングをするときには、説明変数の自己回帰モデルによって従属変数もプリホワイトニングする。「伝達関数モデルが先行指標モデルであり、フィードバックのない一方モデルである場合には、 x プロセスのARIMAモデルを用いて y 系列のプリホワイトニングを行えばよい。」 [Vandaele (1983), pp.291および『訳書』311ページ] という。

つぎに、こうして得られたホワイトノイズ系列である残差の交差相関を求める [Vandaele (1983), p.286および『訳書』306ページ]。伝達関数モデルは、 y_t と x_t の交差相関ではなく、それらをプリホワイトニングして残差 e_t と u_t を得て、それらの交差相関を求めるのである。

したがって、第三段階と第四段階はつぎのようになる。

第三段階 説明変数の1変量自己回帰モデルの構築

プリホワイトニングをするために、説明変数の1変量自己回帰モデルを構築する。具体的には、3次までの自己回帰モデルについて推定値対標準誤差の大きさの分析と残差の分析とを実施してみる。

まず、推定値対標準誤差の大きさについては、SASではT比率として示されている。T比率の絶対値が2に満たないパラメータは削除すべきであり、T比率の高いパラメータで構成されるモデルが適当なモデルである。もし、有意でないパラメータが最高次のものであるならば、そのパラメータを除去する。また、もしそれが最高次のもでないならば、パラメータ推定値間の相関をみて、相関の高い最高次のパラメータを除去する [Vandaele (1983), p.131および『訳書』144ページ]。

また残差の分析についてであるが、もし選択されたモデルが適当なものであるならば、そのモデルにより計算される値と実際値との差、すなわち残差はホワイトノイズであって、有意な自己相関はなく、すべてゼロに近い値をとることになる。したがって、残差の自己相関関数、残差系列がホワイトノイズである確率などをみて最適モデルを判断する。

第四段階 プリホワイトニング済みの説明変数と従属変数の交差相関関数の算出

第三段階で決定した自己回帰モデルで説明変数と従属変数のプリホワイトニングをし、雑音項なしの適当な伝達関数モデルを判断するために、プリホワイトニング済みの説明変数と従属変数の交差相関関数を求める

Vandaeleによれば、「伝達関数モデルの場合には、説明変数と従属関数に関して異時点間の関連の程度を測ることもできる。その関連の程度は、交差共分散および交差相関（または標準化共分散）とよばれ、それぞれ $\gamma_{xy}(k)$ と $\rho_{xy}(k)$ と表わされる。」[Vandaele (1983), p.268および『訳書』285ページ] という。そして、「交差相関は、交差共分散を用いて、

$$\rho_{xy}(k) = \frac{\gamma_{xy}(k)}{\sigma_x \sigma_y} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

と定義される。ここで σ_x と σ_y はそれぞれ x および y 系列の標準偏差である。 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, について $\rho_{xy}(k)$ をプロットしたグラフを交差相関関数 (ccf) とよぶ。」[Vandaele (1983), p.269および『訳書』286-287ページ] という。この段階において説明変数が従属変数にたいして何期先行しているかが判明する。

ここで、改めて y_t と x_t をプリホワイトニングされたデータとすると、プリホワイトニング済みデータによるつぎのような伝達関数モデルの b が判定されたことになる。そこでつぎの段階は、(4) 式の $\omega(B)$, $\delta(B)$, $\theta(B)$, $\phi(B)$ の部分を同定し、診断チェックを行なうことである。したがって、第五段階で $\omega(B)$ と $\delta(B)$, 第六段階で $\theta(B)$ と $\phi(B)$ を取りあげることになる。

第五段階 (b, l, r) の決定と診断チェック

第四段階での交差相関関数にもとづいて (b, l, r) を判断し、そのモデルの残差をみて診断チェックを行なう。実際にはなかなか判断が困難であるので、l, r の 0, 0 から 2, 2 までの 9 通りの組合せすべてについて計算してみて、そのなかから最適モデルを決定するほうが、簡単でしかも確実である。具体的には、第三段階で述べたように、残差の分析と推定値対標準誤差の大きさの分析とを実施してみる。

第六段階 ノイズ構造を加えたフルモデルの構築

第五段階で決定された最適モデルを前提として、ノイズ構造を加えてフルモデルを構築する。この段階では、第三段階で述べたような残差の分析と推定値対標準誤差の大きさの分析とを実施する以外に、残差と説明変数の交差相関をチェックする。無相関である確率は、SAS では CROSSCORRELATIONS の PROB で示されている。この値が高ければ高いほど良いのである。

注

- (1) Helmer & Johansson は、伝達関数モデルの構築のための同定、パラメータの推定、診断チェックの三つの段階を九つのステップに分解し、そのそれぞれについて、売上高を従属変数、広告費を説明変数として説明している [Helmer & Johansson (1977), pp.229-230]。本節の内容を理解するうえで、これらの説明も参考にした。
- (2) Vandaele は、プリホワイトニングの必要性について、つぎのように述べている [Vandaele (1983), pp.287-291および『訳書』311ページ]。「もしある説明変数が y_t 系列の動きを説明しうるかどうかを判断したいならば、まず初めに y_t と x_t のそれぞれについて、自分自身の過去のデータによって説明されるすべての変動を除去すべきである(すなわちプリホワイトニングをして、その結果として得られる残差間に存在する関係を評価するのである)。このようにして初めて、経験的に得られる関係が伝達関数モデルの真の関係を反映していると期待することができる。」たとえ「まったく関係のない二つの系列であっても、それぞれの系列が高い自己相関をもっていれば、両者の間に見せかけの高い交差相関が観測されることは、きわめてあり得る」[Vandaele (1983), p.286および『訳書』306ページ] ことなのである。

4. 使用データ

次節で伝達関数モデルを構築する企業は、日本の代表的産業である電気機器業のなかから(株)日立製作所に決定した。具体的には、①三菱総合研究所『企業経営の分析』の「昭和45年度上期」版から「平成5年度上半期」版までの「産業用電気機器」「通信用、家庭用電気機器」「その他電気機器」という業種区分に財務データが掲載されている、②昭和50年上半期までは3月決算と9月決算であり、それ以降は本決算を3月、中間決算を9月としている、③うえの①②を満たしている会社だけで計算して、三菱総合研究所『企業経営の分析』の「平成4年度」版で売上高が第1位である、という基準にもとづいて選んだ。

従属変数としては、(株)日立製作所の一株当たり当期純利益を採用することにした。そして、そのデータは、三菱総合研究所『企業経営の分析』の「昭和45年度上期」版～「平成5年度上半期」版から採録した。「昭和45年度上期」版は昭和45年9月期決算のデータが示されており、また「平成5年度上半期」版では平成5年9月中間決算のデータが示されている。したがって、半期データを47個入手することができた。本研究では時系列モデルの構築のためにボックス=ジェンキンス法を用いるが、この方法の適用にあたっては一般に50個あるいはそれ以上の時系列データが必要^(a)であるといわれており、ほぼそれを満足させる個数を入手したことになる。

ところで、本研究では、時系列分析の手法を使用して現在株価と将来利益との結びつきを明らかにしようとする。そこで、伝達関数モデルの説明変数として、一般に業績の先行指標であるといわれている株価を取りあげることにする。しかし、(株)日立製作所の株価ではなく、将来の利益予測モデルの構築をも考慮して、電気機器業の東証株価指数(TOPIX)を用いて時系列モデルを構築することにする。本研究で明らかにする株価と利益との結びつきは、(株)日立製作所の半期利益と(株)日立製作所が属する業種別株価指数との結びつきである。

電気機器業の業種別東証株価指数 (TOPIX) は、東京証券取引所調査部『東証統計年報 (昭和45年)』～『東証統計年報 (昭和58年)』および東京証券取引所調査部『証券統計年報 (昭和59年)』～『証券統計年報 (平成5年)』から採録した。東証株価指数は昭和43年1月4日を100としたものであり、これらからは月次のデータを入手することができる。そこで、電気機器業の東証株価指数 (TOPIX) を、昭和45年9月のものから平成5年9月のものまで同じく47個採録した。

以上の結果入手したデータは、図表2の通りである。

図表2 ㈱日立製作所の一株当り半期利益と電気機器業東証株価指数 (TOPIX)

期	一株当り利益	TOPIX	期	一株当り利益	TOPIX
1970.9	6.8	205.45	1982.9	12.8	842.44
1971.3	4.8	218.53	1983.3	13.8	1003.29
1971.9	4.4	192.94	1983.9	14.7	1311.03
1972.3	4.3	256.45	1984.3	15.2	1459.40
1972.9	5.2	307.02	1984.9	17.9	1418.87
1973.3	6.3	320.71	1985.3	19.7	1450.80
1973.9	7.1	317.83	1985.9	17.7	1123.43
1974.3	6.0	290.36	1986.3	13.7	1270.45
1974.9	4.8	244.76	1986.9	9.4	1497.07
1975.3	3.3	274.55	1987.3	9.5	1432.45
1975.9	3.2	276.03	1987.9	10.9	1889.97
1976.3	4.3	378.84	1988.3	7.2	1940.85
1976.9	5.9	410.97	1988.9	11.0	2069.52
1977.3	5.8	421.20	1989.3	12.0	2048.69
1977.9	5.8	410.09	1989.9	11.9	2296.59
1978.3	6.3	424.13	1990.3	11.5	2304.46
1978.9	6.9	446.26	1990.9	11.4	1870.37
1979.3	7.5	488.32	1991.3	11.5	1912.40
1979.9	9.8	517.10	1991.9	8.6	1626.78
1980.3	10.4	487.13	1992.3	6.6	1310.18
1980.9	11.3	598.74	1992.9	4.6	1182.20
1981.3	11.9	745.88	1993.3	6.0	1179.09
1981.9	12.3	937.66	1993.9	3.9	1453.13
1982.3	12.0	757.06			

こうしたデータは、明治大学情報科学センターの汎用コンピュータ「FACOM M1700」により、統計処理アプリケーションソフト「SAS」を使用して処理した。なお、プロシジャーは「ARIMA」である。

(注) ボックス=ジェンキンス法は、一般に、50個かそれ以上のデータが必要だとされるが、必ずしも絶対的な基準とはいえない。必要なデータ数についての議論は、つぎを参照のこと。

拙稿「ボックス=ジェンキンス法による年次利益時系列モデルの同定」、『明治大学社会科学研究所紀要』(1992年3月), 201-203ページ。

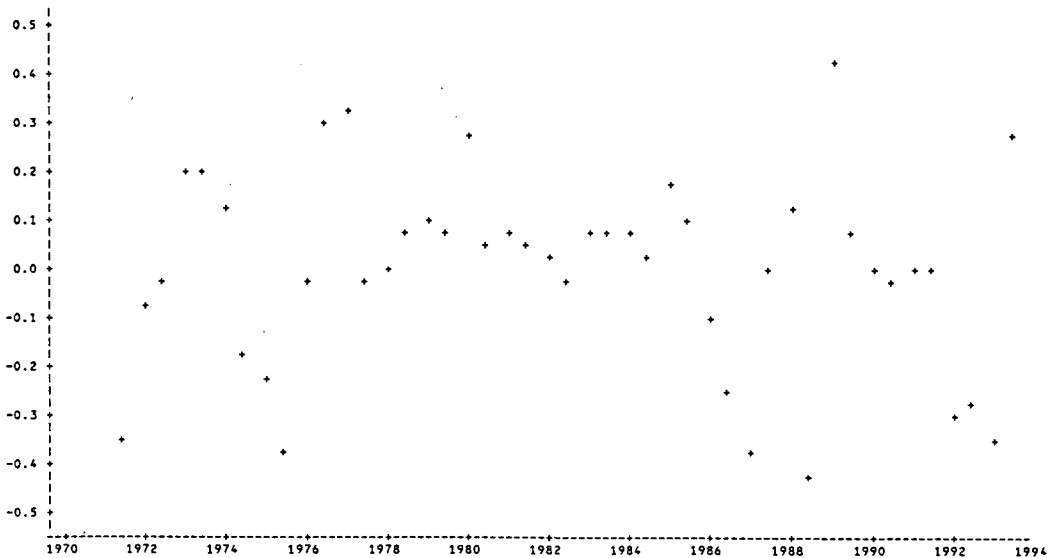
5. 伝達関数モデルの構築

それでは、(株)日立製作所の一株当り半期当期純利益と電気機器業の東証株価指数（TOPIX）とを使用して伝達関数モデルを構築してみよう。この場合、従属変数は(株)日立製作所の一株当り当期純利益であり、説明変数は東証株価指数（TOPIX）である。

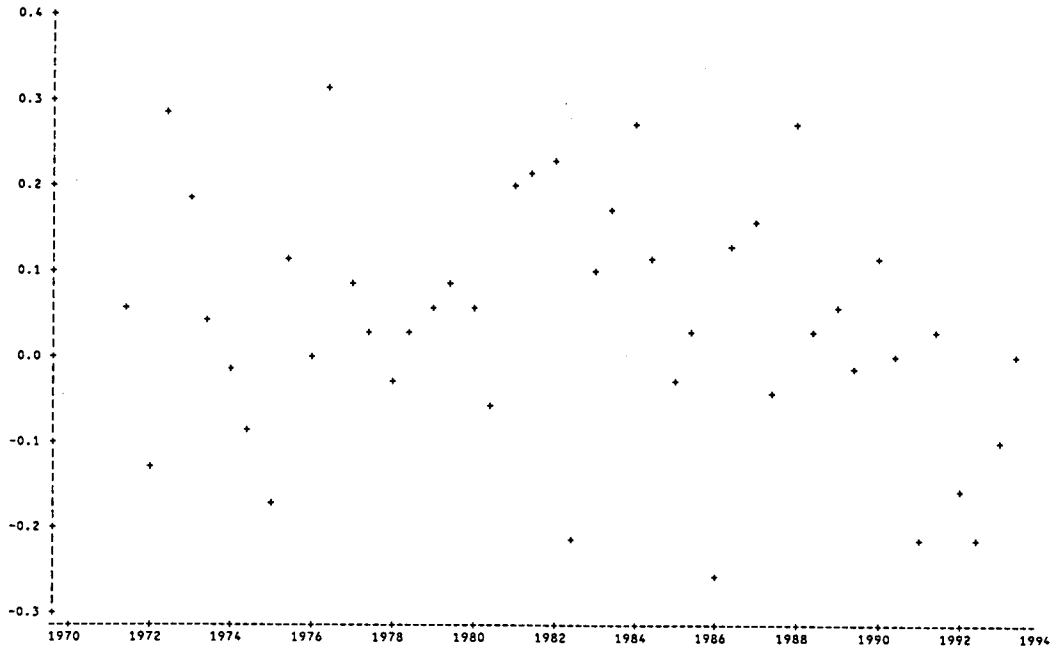
第一段階 分散の安定化

(株)日立製作所の一株当り半期利益と電気機器業の東証株価指数（TOPIX）との原データ，自然対数変換したデータ，平方根変換したデータを図にしてみるだけでは正確な判定ができない。そこで，それらデータの1階の階差をとってみた。自然対数変換したデータの1階差分は，図3と図4に示す通りである。

図表3 自然対数変換した一株当り半期利益の1階差分



図表4 自然対数変換した東証株価指数 (TOPIX) の1階差分



いずれをみても、1階の差分をとった値が平均値を中心にして期間を通じて一定幅の間にあると判断される。また、原データの1階差分および平方根変換したデータの1階差分と比較してみても、自然対数変換したデータのほうが期間を通じてバランスよく一定の幅の間にあるとみることができた。したがって、一株当たり利益と東証株価指数 (TOPIX) のいずれについても、分散を安定化するために自然対数変換することにする。この変換により、両データが定質非定常過程にされたことになる。

第二段階 トレンドの除去

トレンドを除去するためには階差をとることになる。しかし、自然対数変換されたデータおよびそのプロット図をみただけでは何階の階差をとれば良いかはなかなか判断ができない。そこで、階差0～2の3ケースについて計算してみた。そして自然対数変換した一株当たり利益の1階差分の自己相関関数は図表5のようになった。

図表5 自然対数変換した一株当たり半期利益の1階差分の自己相関関数

LAG	COVARIANCE	CORRELATION	-1	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	STD
0	0.041649	1.00000													*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	0
1	0.0054503	0.13086												***										0.147442
2	0.0026642	0.06397											*											0.149946
3	-0.0041930	-0.10067										**												0.150538
4	-0.0040537	-0.09733										**												0.151994
5	-0.0036793	-0.08834										**												0.153343
6	0.00020471	0.00492										.												0.154446
7	0.0054394	0.13060										.		***										0.154449
8	0.0047409	0.11383										.		**										0.156831
9	0.0031038	0.07452										.		*										0.158617
10	-0.0079824	-0.19166										.		****										0.159377

". " MARKS TWO STANDARD ERRORS

この図をみると、自己相関関数がすでにラグ 1 の段階から有意でなくなっている。しかし、階差 0 と階差 2 では有意なものが存在していた。また、残差がホワイトノイズである確率は、階差 0 が 0.000、階差 1 が 0.870、階差 2 が 0.286 であった。したがって、自然対数変換した一株当り半期利益のトレンドを除去するためには、1 階の階差をとることが適当であると判断される。

自然対数変換した東証株価指数 (TOPIX) の 1 階差分の自己相関関数は図表 6 の通りであった。

図表 6 自然対数変換した東証株価指数 (TOPIX) の 1 階差分の自己相関関数

LAG	COVARIANCE	CORRELATION	-1	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	STD
0	0.019994	1.00000												*****										0
1	0.0020967	0.10487												**										0.147442
2	0.00031921	0.01596												.										0.149055
3	-0.0029377	-0.14693												***										0.149092
4	-0.0027699	-0.13854												***										0.152207
5	0.0008963	0.04483												*										0.154924
6	-0.0004756	-0.02379												**										0.155206
7	0.0022642	0.11324												**										0.155285
8	-0.0016627	-0.08316												**										0.157070
9	-0.0014851	-0.07428												*										0.158024
10	0.0018235	0.09120												**										0.158781

.. MARKS TWO STANDARD ERRORS

東証株価指数 (TOPIX) についても、自己相関関数は、階差 0 と階差 2 では有意なものが存在しているにもかかわらず、この図表 6 から分かるように、階差 1 ではすでにラグ 1 の段階から有意でなくなっている。また、残差がホワイトノイズである確率は、階差 0 が 0.000、階差 1 が 0.832、階差 2 が 0.077 であった。したがって、どちらから判断しても、自然対数変換した東証株価指数 (TOPIX) のトレンドを除去するために適当な階差は 1 階であると考えられる。

第三段階 説明変数の 1 変量自己回帰モデルの構築

0 次から 3 次までの自己回帰モデルについて、残差と推定値対標準誤差の大きさを分析してみた。まず、推定値対標準誤差の大きさである T 比率をみてみた。その結果はつぎの通りである。

図表 7 各自己回帰モデルの T 比率

	AR (0)	AR (1)	AR (2)	AR (3)
定数	2.02	1.81	1.79	2.04
1 次		0.71	0.69	0.73
2 次			0.03	0.14
3 次				-1.04

T 比率の絶対値が 2 に満たないパラメータは削除すべきであり、T 比率の高いパラメータで構成されるモデルが適当であるということ判断すると、AR (0) が適当ということになる。

また、残差については、自己相関関数をみただけでは判然としない。そこで、残差系列がホワイトノイズである確率をみてみる。SAS では PROB で示されており、それは図表 8 の通りであった。

図表 8 各自己回帰モデルの残差のホワイトノイズ確率

ラグ	AR (0)	AR (1)	AR (2)	AR (3)
6	0.832	0.811	0.687	0.787
12	0.961	0.943	0.907	0.909
18	0.973	0.969	0.952	0.953
24	0.955	0.957	0.940	0.940

この結果をみても AR (0) の適合度が最も高い。

結局, AR (0), すなわち自然対数変換した東証株価指数 (TOPIX) の階差を 1 階とったデータそれ自体がすでにホワイトノイズであると考えることができる。

第四段階 プリホワイトニング済みの説明変数と従属変数の交差相関関数の算出

この段階では, 第三段階で判定した AR (0) により説明変数と従属変数をプリホワイトニングし, そのうえで両者の間の交差相関関数を算出する。しかし, AR (0) ということは, 自己回帰部分がないということであるから, 実質的には, 自然対数変換した一株当たり利益の 1 階差分と, 同じく自然対数変換した東証株価指数 (TOPIX) の 1 階差分との交差相関関数を求めることである。その結果は図表 9 の通りであった。

図表 9 自然対数変換をした一株当たり利益と東証株価指数 (TOPIX) の交差相関関数

LAG	COVARIANCE	CORRELATION	-1	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	
-10	0.0049196	0.17048													***									
-9	0.0042230	0.14634													***									
-8	0.0029033	0.10061													**									
-7	0.0027886	0.09663													**									
-6	0.0018891	0.06546													*									
-5	0.0045810	0.15875													***									
-4	-0.0034605	-0.11992											**											
-3	-0.0061584	-0.21341											****											
-2	-0.0064347	-0.22299											****											
-1	0.0040932	0.14184													***									
0	0.0069923	0.24231													*****									
1	0.0075359	0.26115													*****									
2	0.012235	0.42397													*****									
3	0.0023921	0.08290													**									
4	-0.0002798	-0.00970																						
5	-0.0022667	-0.07855											**											
6	-0.0041637	-0.14429											***											
7	0.0049302	0.17085													***									
8	0.00058113	0.02014																						
9	0.00063383	0.02196																						
10	-0.0064097	-0.22212													****									

". " MARKS TWO STANDARD ERRORS

これをみると, ラグ 2 が有意となっている⁽¹⁾。(b , 1 , r) のうち, b = 2 なのである。これは, 電気機器業の東証株価指数 (TOPIX) は(株)日立製作所の一株当たり半期利益より 2 期先行しているということを意味している。本研究で使用しているのは半期データであるから, このことは, 株価が 1 年後の一株当たり利益と関連しているということを意味している。さらにいえば, 株価は 1 年後の一株当たり利益を予測し, それを折り込んで形成されていると考えることができる。この点, すなわち株価とその 1 年後の一株当たり利益が関連しているということを発見したことが, 本研究の最大の意義であろう。

第五段階 (b , 1 , r) の決定と診断チェック

理想的には第四段階での交差相関関数にもとづいて (b , 1 , r) のすべてを判断できれば良いのであるが, 実際にはそうした判断は非常に困難である。そこで, 1 , r の 0 , 0 から 2 , 2 までの 9 通りの組合せすべてについて計算し, そのなかから最適モデルを探した。探索にあたっては, 推定値対標準誤差の大きさと残差とを分析してみた。その結果決定されたのが, (b , 1 , r) = (2 , 0 , 0) である⁽²⁾。式で表現すると, $y_t = \omega_0 x_{t-2} + a_t$ となる。なお, 推定値対標準誤差の大きさは, 定数が -0.97, ω_0 が 3.23 であった。また, 残差がホワイトノイズである確率は, ラグ 6 で 0.967, ラグ 12 で 0.823, ラグ 18 で 0.977, ラグ 24 で 0.996 であった。きわめて高い確率であるといえる。 ω_0 の推定

値は0.634であり、定数の推定値は-0.028であったので、自然対数変換した一株当たり利益の1階差分 y_t は、自然対数変換した東証株価指数 (TOPIX) の1階差分 x_t とは、 $y_t = 0.634 x_{t-2} - 0.028$ という関係にあることになる。なお、残差の自己相関関数は図表10の通りである。

図表10 (b, 1, r) = (2, 0, 0) の場合の残差の自己相関関数

LAG	COVARIANCE	CORRELATION	-1	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	STD
0	0.034188	1.00000												*****										0
1	-0.0005709	-0.01670																						0.150756
2	-0.0023875	-0.06983											*											0.150798
3	-0.0034138	-0.09985											**											0.151531
4	0.0016644	0.04868											*											0.153019
5	-0.0034342	-0.10045											**											0.153371
6	-0.0001363	-0.00399																						0.154859
7	0.0012198	0.03568																						0.154861
8	0.0051637	0.15104																						0.155048
9	0.0027011	0.07901																						0.158356
10	-0.0078986	-0.23104																						0.159250

".*" MARKS TWO STANDARD ERRORS

第六段階 ノイズ構造を加えたフルモデルの構築

第五段階で決定された最適モデルを前提として、さらに a_t 部分についてもモデル化する。T比率により推定値対標準誤差の大きさを、PROBにより残差を分析してみた。P=0, Q=0のモデルの残差がホワイトノイズである確率は、ラグ6では0.967, ラグ12では0.977, ラグ18では0.977, ラグ24では0.996であり、これ以上高いモデルは存在しなかった。さらに、残差と説明変数の交差相関について、無相関である確率をみたところ、ラグ5では0.896, ラグ11では0.987, ラグ17では0.992, ラグ23では0.991であった⁽³⁾。残差と説明変数の交差相関は無相関であると断定してよい。

P=0, Q=0ということは、 a_t 部分の (p, d, q) は (0, 1, 0) ということである。 a_t 部分には、それ自体が純粹のホワイトノイズであって、ランダムウォーク・モデルがあてはまることになる。したがって、第五段階で確定したモデルが、自然対数変換した一株当たり利益の1階差分と、自然対数変換した東証株価指数 (TOPIX) の1階差分との関係を示したものであるということになる。ここに至り、(b, 1, r) × (p, d, q) = (2, 0, 0) × (0, 1, 0) が確定した。

注

- (1) さらに、ラグ0とラグ1も有意なレベルに近い。ラグ0ということは、電気機器業の東証株価指数 (TOPIX) は(株)日立製作所の一株当たり半期利益と同時に動いているということの意味している。当期利益と現在株価が直接結びついているといえる。また、ラグ1ということは、東証株価指数 (TOPIX) が1期先行しており、株価が半年後の一株当たり利益と関連しているということの意味している。有意なレベルではないが、株価と一株当たり利益についての興味深い関係を示唆しているといえよう。
- (2) (b, 1, r) = (2, 1, 0) の残差がホワイトノイズである確率は、ラグ6が0.964, ラグ12が0.807, ラグ18が0.972, ラグ24が0.995であり、T比率は定数が-0.95, ω_0 が3.11, ω_1 が-0.27であった。また、(b, 1, r) = (2, 0, 1) の残差については、ラグ6が0.964, ラグ12が0.805, ラグ18が0.971, ラグ24が0.995であり、T比率は定数が-0.93, ω_0 が3.12, δ_1 が0.24であった。いずれも残差がホワイトノイズである確率が(2, 0, 0)モデルよりも低く、 ω_1 , δ_1 のT比率も小さく信頼できなかった。
- (3) 残差と説明変数の交差相関については、これ以上高い値を示すモデルもあった。しかし、残差のホワイトノイズである確率が低く、結局、節約の原理から、(p, q) = (0, 0) を最適モデルとする。

6. むすび

最後に、モデルの構築により発見された点を要約することにより、本研究の意義を明らかにする。

本稿の目的は、現在株価と将来利益の結びつきを時系列モデルとして構築することであった。そして、その結びつきを明らかにすることは、現在株価の判断にとって将来利益の予測が重要であるという仮定を検証することにもなると考えられたのであった。

だが、株価を形成するために用いられた将来利益を時系列的に把握することは不可能であるので、本研究では実績利益を用いた。時系列的に株価が実績利益に先行しているならば、株価は将来利益を予測して形成されていると解釈することにしたのである。また、株価も、特定の企業のものではなく、業種別東証株価指数 (TOPIX) を使用した。具体的には、(株)日立製作所の一株当り半期当期純利益と、電気機器業の東証株価指数 (TOPIX) とを用いて時系列モデルを構築した。

しかしながら、取りあげたのは(株)日立製作所 1 社だけであるので、その結果を普遍的なものというわけにはいかない。結局、本研究は、本格的な分析のためにモデル構築の方法を確認するという性格の濃いものであった。

(株)日立製作所の一株当り半期当期純利益と電気機器業の東証株価指数 (TOPIX) とによる伝達関数モデルの構築は、つぎのような結果となった。なお、従属変数は(株)日立製作所の一株当り半期当期純利益であり、説明変数は東証株価指数 (TOPIX) である。

まず、分散を安定化するためには両変数ともに自然対数変換が、トレンドを除去するためには同じく両変数ともに 1 階の階差をとることが適当であることが判明した。そして、この結果えられた時系列データはそれ自体すでにホワイトノイズであったので、AR (0) によりプリホワイトニングをしたうえで、説明変数と従属変数の交差相関関数を求めた。

交差相関関数をみると、ラグ 2 だけが有意となっていた。このことは、電気機器業の東証株価指数 (TOPIX) は(株)日立製作所の一株当り半期利益より 2 期先行しているということを意味している。つまり、(株)日立製作所の株価は 1 年後の一株当り利益を予測し、それを折り込んで形成されていると考えることができるのである。この点を見い出したことが、本研究の最大の意義と考えられる。

伝達関数モデルは、結局、 $(b, 1, r) \times (p, d, q) = (2, 0, 0) \times (0, 1, 0)$ であり、自然対数変換した一株当り半期利益の 1 階差分 y_t は、自然対数変換した東証株価指数 (TOPIX) の 1 階差分 x_t とは、 $y_t = 0.634 x_{t-2} - 0.028$ という関係にあった。このように、本研究では、伝達関数モデルの構築方法を確認することができた。これが本研究の第二の意義である。

参考文献

- Beaver, W. H., *Financial Reporting: An Accounting Revolution*, 2nd ed., Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1989 (伊藤邦雄訳『財務報告革命』白桃書房, 1986, ただし初版についての訳

書)。

Helmer, R. M., & J. K. Johansson, An Exposition of the Box-Jenkins Transfer Function Analysis with an Application to the Advertising-Sales Relationship, *Journal of Marketing Research* (May 1977), pp.227-239. .

Hopwood, W. S., The Transfer Function Relationship Between Earnings and Market-Industry Indices: An Empirical Study, *Journal of Accounting Research* (Spring 1980), pp.77-90.

森 久「ボックス=ジェンキンス法による年次利益時系列モデルの同定」、『明治大学社会科学研究所紀要』(1992年3月), 193-206ページ。

桜井久勝『会計利益情報の有用性』千倉書房, 1991。

Vandaele, W., Applied Time Series and Box-Jenkins Models, Orlando: Academic Press, Inc., 1983 (蓑谷千鳳彦・廣末 毅訳『時系列入門—ボックス=ジェンキンスモデルの応用—』多賀出版, 1988)。

〈付 記〉

コンピュータによるデータ処理ならびに統計的知識については、明治大学情報科学センター・システム開発研究員の二宮智子氏の厚意あるご助力をえた。ここに記して深謝の意を表する。

(もり ひさし)