明治大学科学技術研究所紀要
27(13) : 113—123, 1988

Mem. Inst. Sci. Tech. Meiji Univ.
27(13) : 113—123, 1988

非平衡 Thermo Field Dynamics

中　村　孔　一

Non-Equilibrium Thermo Field Dynamics

Koichi NAKAMURA*

* *Division of Natural Science, Meiji University, Izumi
1-9-1 Eifuku, Suginami-ku, Tokyo 168*

Received November 16, 1988; Accepted January 9, 1989

Synposis. A scheme of non-equilibrium thermo field dynamics is proposed in constructive way. It is shown that the scheme proposed here satisfies all the axioms of non-equilibrium thermo field dynamics given by H. Matsumoto: Prog. Theor. Phys. 79, 373(1988). It is also pointed out that the causal formulation of the perturbation theory is possible.

§1. はじめに

Thermo field dynamics は，有限温度の系をあつかう場の量子論のひとつの形式として，梅沢と高橋によって提唱された[1]。

場の量子論に温度を導入する方法としては，松原による虚数時間の形式がよく知られており[2]，多くの問題に応用されている。しかし，この方法は，時間に依存した現象をとりあつかうためには，虚数時間で計算された量を実時間に解析接続する必要があり，その手続きは必ずしも容易ではない。そのため，積分路そのものを解析接続して，実時間のままで温度グリーン関数を計算しようとする方法が，Schwinger や Keldysh によって提案されているが[3),4)]，時間順序積と反時間順序積を混ぜて用いており見通しはよくない。

これらの方法にくらべて，梅沢たちによる thermo field dynamics は，通常の場の量子論の形式の自然な拡張として，有限温度の場の量子論を定式化しようとする試みである。Thermo field dynamics の鍵となるアイデアは物理量 A の温度平均

$$\langle A\rangle=\mathrm{Tr}\,e^{-\beta H}A/\mathrm{Tr}\,e^{-\beta H} \tag{1.1}$$

を，期待値

$$\langle A\rangle=\langle 0(\beta)|A|0(\beta)\rangle \tag{1.2}$$

として与えるような状態ベクトル $|0(\beta)\rangle$ を考えることにある。

簡単のために，系のハミルトニアン H の固有状態（離散的な固有値 E_n に属する），

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle \tag{1.3}$$

の全体 $\{|n\rangle\}$ が，状態ベクトル空間 $\mathfrak{H}$ の完全正規直交系をつくるような場合を考えてみよう：

$$\langle m|n\rangle = \delta_{nm}, \tag{1.4}$$

$$\sum_n |n\rangle\langle n| = I. \tag{1.5}$$

まず，2つの $\mathfrak{H}$ のテンソル積で定義される空間 $\mathscr{H} = \mathfrak{H}\otimes\mathfrak{H}$ を考える。物理量を表わす $\mathfrak{H}$ の上の演算子 A は，$A\otimes I$ として自然に $\mathscr{H}$ の上の演算子と同一視できる（以下では，これも同じ記号 A で表わす）。梅沢たちは，式（1, 2）をみたす $|0(\beta)\rangle$は，$\mathscr{H}$ に属する次のようなベクトルで与えられると主張する：

$$|0(\beta)\rangle = Z^{-1/2}\sum_n e^{-\beta E_n/2}|n\rangle\otimes|n\rangle. \tag{1.6}$$

ただし，$Z = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta H} = \sum_n e^{-\beta E_n}$.

たしかに，（1.6）を（1.2）の右辺に代入すると

$$\begin{aligned}
&\langle 0(\beta)|A|0(\beta)\rangle \\
&= Z^{-1}\sum_{m,n}\langle m|A|n\rangle\langle m|n\rangle e^{-\beta E_m/2}e^{-\beta E_n/2} \\
&= Z^{-1}\sum_n\langle n|A|n\rangle e^{-\beta E_n}
\end{aligned}$$

となって，（1.1）の右辺に一致する。

混合状態である Gibbs 状態を，純粋状態 $|0(\beta)\rangle$ で書き表わすしかけは，状態空間の二重化にある。それにともなって，演算子も二重になる。すなわち，$\mathfrak{H}$ 上の演算子 A に，$\mathscr{H}$ の上の二つの演算子 $A\otimes I$ と $I\otimes A$ が自然な形で対応する。小嶋は，Haag たちによる C^* 代数を用いた統計力学の定式化と thermo field dynamics の関係を調べ，上記の二重化が作用素代数の冨田-竹崎理論と密接に関係していることを指摘している[5]。

こうして，演算子の二重化という煩雑さはあるが，熱平均を“一種の”真空期待値として書き表せたおかげで，thermo field dynamics では，通常の場の量子論の形式が，ほとんどそのままの形で成りたっており，従来の場の量子論での知見が，有限温度の系の分析に有効に応用されている。そうした議論の詳細については，ここでは文献6), 7)にゆずることにする。また，松原の方法，Keldysh たちの方法と thermo field dynamics の間の関係は文献8) にくわしく論じられている。

そのような成果をふまえて，近年，thermo field dynamics を熱平衡にない系にまで適用できる形に拡張しようとする試みがいくつかなされている[9~14]。この論文では，これらの仕事で“非平衡 thermo field dynamics の基本的な要請”として要求されているいくつかの命題を，自然な形でみたしている枠組を構成的につくるひとつの方法を提案する。

§2では，以後の便利のために，非平衡系の dynamics を密度行列を用いて書き表わす方

法を簡単に復習する。§ 3 では，与えられた密度行列 ρ に対応した状態 $|G\rangle$ (平衡系の場合の $|0(\beta)\rangle$ の一般化) を，もともとの高橋-梅沢のアイデアに近い形でつくる。さらに，モジュラー共役変換をひきおこす演算子 J を導入し，それによって tilde 変換を定義する。そうすると，論文13) で，松本が "非平衡 thermo fietd dynamics の公理" として与えた命題が導出されることを示す。§ 4 では，Fermi 型の演算子を含む場合について述べる。最後に § 5 で，摂動論の causal な定式化が可能なことを示す。

§ 2. 密度行列の方法

ある物理系の状態は，一般的には，密度行列とよばれる次のような演算子であらわれる。すなわち，その状態にある系で物理量 A を測定したとき，結果の期待値 $\langle A\rangle$ が，

$$\langle A\rangle=\mathrm{Tr}\,\rho A \tag{2.1}$$

と与えられるような正定値の演算子 ρ であらわされる (ただし $\mathrm{Tr}\,\rho=1$ と規格化した)。

系が平衡状態にないときには，密度行列 ρ は一般に時間とともに変化するが，その運動は量子論的な Liouville 方程式

$$i\hbar\frac{\partial\rho}{\partial t}=[H,\ \rho] \tag{2.2}$$

にしたがう。ただし，H は系のハミルトニアンである。

状態をあらわす ρ が時間変化をしているという意味で，式 (2.2) は Schrödinger 表示での記述になっている。これを，物理量 A が時間変化するような Heisenberg 表示に書きかえることもできる。

初期条件 $\rho(0)=\rho_0$ のもとで (初期時刻を $t=0$ にとったことは，あまり本質的ではない)，方程式 (2.2) を解くと

$$\rho(t)=e^{-itH/\hbar}\rho_0 e^{itH/\hbar} \tag{2.3}$$

これを (2.1) に代入すると

$$\begin{aligned}\langle A\rangle&=\mathrm{Tr}(e^{-itH/\hbar}\rho_0 e^{itH/\hbar}A)\\&=\mathrm{Tr}(\rho_0 e^{itH/\hbar}Ae^{-itH/\hbar})\\&=\mathrm{Tr}(\rho_0 A_H(t)).\end{aligned}$$

すなわち，式 (2.1) は

$$\langle A\rangle=\mathrm{Tr}(\rho_0 A_H(t)) \tag{2.4}$$

と書きかえられる。ただし，

$$A_H(t)=e^{itH/\hbar}Ae^{-itH/\hbar}$$

は，物理量 A の Heisenberg 表示で，運動方程式

$$i\hbar\frac{\partial A_H(t)}{\partial t}=[A_H(t),\ H] \tag{2.5}$$

にしたがう。

前節で述べたように，thermo field dynamics の鍵となるアイデアは，式 (1.1) で与えら

れる温度平均を，式 (1.2) のように期待値で書きあらわすことにあった。したがって，thermo field dynamics を非平衡系に拡張するためには，同じように，非平衡系での平均値 (2.4) を期待値の形に書きかえることが必要であろう。次の節では，適当な空間とその中のベクトルを定義して，この書きかえを実行する。

§ 3.　非平衡 thermo field dynamics

密度行列であらわされる状態は，一般には混合状態であるから，状態ベクトル空間 $\mathfrak{H}$ の元によって，平均値 (2.4) を期待値の形に書くことはできない。期待値の形に書くためには，平衡系の場合の $\mathscr{H}$ のように，より大きな空間を考える必要がある。そこで，まず，次のような空間を考えてみよう。

2つの添字をもつ正規直交系 $\{\Phi_{nm}\}_{n,m=1,2,3\cdots}$ を考える：

$$(\Phi_{kl},\ \Phi_{mn})=\delta_{km}\delta_{ln}. \tag{3.1}$$

そして，この直交系 $\{\Phi_{nm}\}$ によって張られる空間を $\hat{\mathfrak{H}}$ とする。

物理量をあらわす演算子（状態ベクトル空間 $\mathfrak{H}$ の上の自己共役演算子）A に対して次のように定義される $\hat{\mathfrak{H}}$ 上の演算子 A' を導入する。状態ベクトル空間 $\mathfrak{H}$ に適当な基底 $\{|n\rangle\}_{n=1,2,3\cdots}$ をとり，

$$(\Phi_{kl},\ A'\Phi_{mn})=\langle k|A|m\rangle\delta_{ln} \tag{3.2}$$

によって A' の行列要素を定める。これによって，$\mathfrak{H}$ 上の演算子の集まりがつくる代数が $\hat{\mathfrak{H}}$ 上の演算子の代数に埋め込まれる。このようにして埋めこまれた $\hat{\mathfrak{H}}$ 上の演算子のつくる代数を $\mathfrak{A}$ と書くことにする。また，簡単のために，以下では上の A' をもとの演算子（$\mathfrak{H}$ 上の）と同じ記号 A で書く。

次に，$\hat{\mathfrak{H}}$ 上に次のような演算子 J を定義する：

$$J\sum_{nm}c_{nm}\Phi_{nm}=\sum_{nm}c_{nm}{}^*\Phi_{mn}. \tag{3.3}$$

ただし，c^* は c の複素共役を意味する。

定義から容易にわかるように，この J は次のような性質をもっている：

$$J^2=1, \tag{3.4}$$

$$(J\Phi,\ J\Psi)=(\Phi,\ \Psi)^*,\qquad \Phi,\ \Psi\in\hat{\mathfrak{H}}. \tag{3.5}$$

命題 3.1　A を $\mathfrak{A}$ の元とすると，

$$(\Phi_{kl},\ JAJ\Phi_{mn})=(A_{ln})^*\delta_{km}. \tag{3.6}$$

ただし，$A_{ln}=\langle l|A|n\rangle$ を意味する。

証明　(3.3), (3.4), (3.5) より

$$\begin{aligned}(\Phi_{kl},\ JAJ\Phi_{mn})&=(J\Phi_{kl},\ AJ\Phi_{mn})^*\\&=(\Phi_{lk},\ A\Phi_{nm})^*=(A_{ln})^*\delta_{km}.\end{aligned}$$

命題 3.2　A を $\mathfrak{A}$ の元とすると，

$$(JAJ)^\dagger=JA^\dagger J. \tag{3.7}$$

ただし，† はエルミート共役を意味する。

証明 (3.7) の左辺の行列要素が右辺の行列要素に等しいことを示す：

$$
\begin{aligned}
(\Phi_{kl},\ (JAJ)^{\dagger}\Phi_{mn}) &= (\Phi_{mn},\ JAJ\Phi_{kl})^* \\
&= ((A_{nl})^*\delta_{km})^* = (A^{\dagger}{}_{ln})^*\delta_{km} \\
&= (\Phi_{kl},\ JA^{\dagger}J\Phi_{mn}).
\end{aligned}
$$

この命題から，A が自己共役なら，JAJ も自己共役であることがわかる。

命題 3.3 $\mathfrak{A}$ に属する任意の演算子 A, B について，A と JBJ は交換する：

$$[A,\ JBJ]=0. \tag{3.8}$$

証明 $\{\Phi_{mn}\}$ は $\hat{\mathfrak{H}}$ で完全系をつくる（$\hat{\mathfrak{H}}$ は $\{\Phi_{mn}\}$ によって張られる空間である）ことを使うと，

$$
\begin{aligned}
&(\Phi_{kl},\ [A,\ JBJ]\Phi_{mn}) \\
&=\sum_{pq}(\Phi_{kl},\ A\Phi_{pq})(\Phi_{pq},\ JBJ\Phi_{mn})-\sum_{pq}(\Phi_{kl},\ JBJ\Phi_{pq})(\Phi_{pq},\ A\Phi_{mn}) \\
&=\sum_{pq}A_{kp}\delta_{lq}(B_{qn})^*\delta_{pm}-\sum_{pq}(B_{lq})^*\delta_{kp}A_{pm}\delta_{qn} \\
&=A_{km}(B_{ln})^*-(B_{ln})^*A_{km}=0.
\end{aligned}
$$

この命題は，$\mathfrak{A}'=J\mathfrak{A}J$ とすると，$\mathfrak{A}$ の元と $\mathfrak{A}'$ の元はつねに交換することを意味している。また $J^2=1$ であるから，$\mathfrak{A}'$ は代数として $\mathfrak{A}$ と同じ構造をもっている。すなわち，$AB=C$ ならば，$JAJJBJ=JCJ$ となる。

簡単のために，$\mathfrak{A}$ の元はすべて Bose 型の演算子であるとして（Fermi 型を含む場合への拡張は次の節で行う），$\tilde{A}=JAJ$ と書くと，上記の諸命題は

$$
\begin{aligned}
&[A,\ \tilde{B}]=0 \longleftarrow (3.8), \\
&(AB)^{\sim}=\tilde{A}\tilde{B} \longleftarrow (3.4), \\
&(c_1A+c_2B)^{\sim}=c_1{}^*\tilde{A}+c_2{}^*\tilde{B} \longleftarrow (3.6), \\
&(\tilde{A})^{\dagger}=(A^{\dagger})^{\sim} \longleftarrow (3.7), \\
&(\tilde{A})^{\sim}=A \longleftarrow (3.4).
\end{aligned}
$$

と書きあらわせる。これは，松本が tilde conjugation rules として列挙したもの（論文(13)の式 (2.1)，(2.2)）に他ならない。

以上を準備として，平均値 (2.4) を期待値として書きあらわす問題を考えてみよう。密度行列 ρ_0 が与えられている，それに応じて，次のような $\hat{\mathfrak{H}}$ のベクトルを考える（以下，簡単のために ρ の添字 0 は省略する）：

$$\Phi_{\rho}=\sum\Delta\Phi_{nn}. \tag{3.9}$$

ただし，$\Delta=\sqrt{\rho}$ を意味する。密度行列 ρ は正定値演算子であるから，つねに ρ の平方根は定義できる。この Φ_{ρ} が，平均値 (2, 4) を期待値の形に書くベクトルになっている。

命題 3.4 A を $\mathfrak{A}$ の元とすると，

$$(\Phi_{\rho},\ A\Phi_{\rho})=\mathrm{Tr}(\rho A). \tag{3.10}$$

ただし，右辺の Tr は $\mathfrak{H}$ での trace を意味する。

証明 密度行列 ρ は自己共役であるから，Δ も自己共役である。したがって，

$$(\Phi_\rho,\ A\Phi_\rho)=\sum_{mn}(\Delta\Phi_{mm},\ A\Delta\Phi_{nn})$$
$$=\sum_{mn}(\Phi_{mm},\ \Delta A\Delta\Phi_{nn})=\sum_{mn}(\Delta A\Delta)_{mn}\delta_{mn}$$
$$=\mathrm{Tr}(\Delta A\Delta)=\mathrm{Tr}(\Delta^2 A)=\mathrm{Tr}(\rho A).$$

また，このようにして導入されたベクトル Φ_ρ は次の条件をみたしている。

命題 3.5　A を $\mathfrak{A}$ の元とすると，

$$\Delta A\Phi_\rho=J\Delta A^\dagger J\Phi_\rho. \tag{3.11}$$

証明　左辺と Φ_{kl} の内積をとると，

$$(\Phi_{kl},\ \Delta A\Phi_\rho)=\sum_{n}(\Phi_{kl},\ \Delta A\Delta\Phi_{nn})$$
$$=\sum_{n}(\Delta A\Delta)_{kn}\delta_{ln}=(\Delta A\Delta)_{kl}.$$

一方，右辺と Φ_{kl} の内積をとると，(3.5) より

$$(\Phi_{kl},\ J\Delta A^\dagger J\Phi_\rho)=\sum_{n}(\Phi_{kl},\ J\Delta A^\dagger J\Delta\Phi_{nn})$$
$$=\sum_{n}(J\Phi_{kl},\ \Delta A^\dagger J\Delta\Phi_{nn})^*$$
$$=\sum_{n}(A\Delta J\Phi_{kl},\ J\Delta\Phi_{nn})^*$$
$$=\sum_{n}(J\Delta\Phi_{nn},\ A\Delta\Phi_{lk})$$
$$=\sum_{n}\sum_{pq}(J\Delta\Phi_{nn},\ \Phi_{pq})(\Phi_{pq},\ A\Delta\Phi_{lk})$$
$$=\sum_{n}\sum_{pq}(\Delta\Phi_{nn},\ J\Phi_{pq})^*(\Phi_{pq},\ A\Delta\Phi_{lk})$$
$$=\sum_{n}\sum_{pq}(\Phi_{qp},\ \Delta\Phi_{nn})(\Phi_{pq},\ A\Delta\Phi_{lk})$$
$$=\sum_{n}\sum_{pq}\Delta_{qn}\delta_{pn}(A\Delta)_{pl}\delta_{qk}$$
$$=\sum_{n}\Delta_{kn}(A\Delta)_{nl}=(\Delta A\Delta)_{kl}.$$

これは，左辺と Φ_{kl} の内積に一致する。Φ_{kl} は完全系 $\{\Phi_{mn}\}$ の任意の元であるから，(3.11) がなりたつ。

$\tilde{A}=JAJ$ という記法をつかうと，(3.11) は，

$$\Delta A\Phi_\rho=\tilde{\Delta}\tilde{A}^\dagger\Phi_\rho$$

と書ける。A を Bose 型の演算子とすると，これは，松本が thermal state condition とよんだ条件（論文(13) の式 (2.5)）と一致する。熱平衡状態の場合には，この条件が KMS 条件（Kubo-Martin-Schwinger の条件）に一致することはよく知られている[5]。

この節を終る前に，$\hat{\mathfrak{H}}$ 上の演算子としてみたときの物理量の時間変化についてふれておこう。A が $\mathfrak{A}$ の元であれば，Heisenberg 表示での A の時間発展は，運動方程式 (2.5) にしたがっておこる：

$$i\hbar\frac{\partial A_H(t)}{\partial t}=[A_H(t),\ H].$$

両辺のエルミート共役をとり，J ではさむと，

$$i\hbar\frac{\partial JA_H{}^\dagger(t)J}{\partial t}=-[JA_H{}^\dagger J,\ JHJ].$$

そこで,

$$A_H{}^\alpha(t)=\begin{cases}A_H(t), & \alpha=1\\ JA_H{}^\dagger(t)J, & \alpha=2\end{cases} \tag{3.12}$$

と書くことにすると, (3.8) に注意して, 上の2つの方程式を

$$i\hbar\frac{\partial A_H{}^\alpha(t)}{\partial t}=[A_H{}^\alpha(t),\ \hat{H}] \tag{3.13}$$

とまとめることができる。ただし, $\hat{H}=H-JHJ$.

最後に, A が $\mathfrak{A}$ の元であれば $A_H(t)$ も $\mathfrak{A}$ の元であるから, (3.10), (3.11) 等の式は $A_H(t)$ についても成りたっていることを注意したい。

§ 4. Fermi 型演算子

平衡系の thermo field dynamics では, Fermi 型の演算子 (Fermi 場の奇数個の積からなる演算子) A, B に対しては, 反交換関係

$$[A,\ \tilde{B}]_+=0 \tag{4.1}$$

がなりたつとしている[6]。A と $\tilde{A}$ を共通にとりあつかうためには, 非平衡の場合にもこの条件がなりたつことが望ましい。しかし, 命題3.3の証明にみるように, A, B が $\mathfrak{A}$ の元であれば Fermi 型であっても, 交換関係 (3, 8) がなりたつ。したがって, Fermi 型の場合にも $\tilde{A}=JAJ$ とすると, (4.1) がなりたたない。そのため, Fermi 型演算子に対しては, $\tilde{A}$ の定義を変更する必要がある。

その変更は, Klein 変換を用いた小嶋の方法を[5], いまの場合に拡張することでできる。

まず, 次のような性質をもつ $\hat{\mathfrak{H}}$ 上の演算子 $\hat{\theta}$ を考える:

$$\hat{\theta}A\hat{\theta}=\sigma A \tag{4.2}$$

ただし, A が Bose 型ならば, $\sigma=1$。Fermi 型ならば $\sigma=-1$ とする。さらに, θ は

$$J\hat{\theta}=\hat{\theta}J,\quad \hat{\theta}^2=1 \tag{4.3}$$

をみたすとする。

このような $\hat{\theta}$ は, Fermion 数の演算子 F を使えば, 次のようにつくれる:

$$\hat{\theta}=e^{i\pi(F-JFJ)}=e^{i\pi F}Je^{i\pi F}J \tag{4.4}$$

密度行列は Bose 型であると考えてよいから, $\hat{\theta}$ が (4.4) で与えられているとすれば,

$$\hat{\theta}\Phi_\rho=\Phi_\rho \tag{4.5}$$

そこで, Fermi 型の演算子に対しては, $\tilde{A}$ を次のように定義する:

$$\begin{aligned}\tilde{A}&=-iJAJ\hat{\theta},\\ (A^\dagger)^\sim&=-iJA^\dagger J\hat{\theta}=(\tilde{A})^\dagger\end{aligned} \tag{4.6}$$

このように, $\tilde{A}$ を定義すると, Fermi 型の演算子 A, B に対して, (4.1) がなりたつことは次のようにしてわかる。

$$[A,\ \tilde{B}]_+=[A,\ -iJBJ\hat{\theta}]_+$$
$$=-iJBJ[A,\ \hat{\theta}]_+-i[A,\ JBJ]\hat{\theta}=0.$$

A が Bose 型，B が Fermi 型であれば，

$$[A,\ \tilde{B}]=-iJBJ[A,\ \hat{\theta}]-i[A,\ JBJ]\hat{\theta}=0.$$

上のように定義された $\tilde{A}$ が，前節で述べた tilde conjugation rules をみたすことは容易に確かめられる。

たとえば，

$$(\tilde{A})^{\sim}=-iJ(-iJAJ\hat{\theta})J\hat{\theta}$$
$$=J^2AJ^2\hat{\theta}^2=A.$$

さらに，A が Fermi 型であるとすると，条件 (3.11) は

$$\Delta A\Phi_\rho=i\tilde{\Delta}\tilde{A}^\dagger\Phi_\rho$$

と書きかえられる。ここで，(4.5) および Δ が Bose 型であるということを使った。この式は松本の thermal state condition (論文 (13) の式 (2.5)) と一致している。

こうして，Bose 型に対しては，$\tilde{A}=JAJ$，Fermi 型に対しては，$\tilde{A}=-iJAJ\hat{\theta}$ として $\tilde{A}$ を定義すると，前節で導入した枠組が，論文 (13) で松本が提唱した公理のすべてをみたしていることが証明された。

§5.　摂動論の causal な型式

場の量子論における摂動計算では，ファインマン・グラフを用いる方法がきわめて強力である。非平衡 thermo field dynamics においても，ファインマン・グラフの技法が可能であれば，具体的な問題への応用の上で非常に有効であると考えられる。そのためには，摂動展開の各項が causal な形になることが必要である。すなわち，Heisenberg 表示での場の演算子の T 積を相互作用表示で書きかえたときに，再び T 積の形に書けることが必要である。前節までに述べてきた理論形式が，この要求をみたしていることを以下に示す。このことは，われわれの理論形式が松本の公理をみたしていることからほぼ自明であり，論文 (13) での松本の議論をわれわれの枠組でくり返すことになる。

出発点として，考えている系のハミルトニアン H は，非摂動部分 H_0 と摂動部分 H_I の和で書けていると仮定しよう：

$$H=H_0+H_I. \tag{5.1}$$

それに応じて，式 (3.13) の右辺に現れる $\hat{H}$ も非摂動部分と摂動部分の和で書かれる：

$$\hat{H}=\hat{H}_0+\hat{H}_I. \tag{5.2}$$

ただし，$\hat{H}_0=H_0-JH_0J$，$\hat{H}_I=H_I-JH_IJ$.

次に，相互作用表示での演算子 $A^\alpha(t)$ を導入する。それは，時刻 $t=-\tau$ で Heisenberg 表示に一致し，非摂動ハミルトニアン $\hat{H}_0$ で時間発展する演算子として定義される。すなわち，$A^\alpha(t)$ は，初期条件 $A^\alpha(-\tau)=A_H{}^\alpha(-\tau)$ をみたし，運動方程式

$$i\frac{\partial A^\alpha(t)}{\partial t}=[A^\alpha(t),\ \hat{H}_0] \tag{5.3}$$

にしたがう（簡単のために，以下 $\hbar=1$ となる単位系を使う）。ただし，$A^\alpha(t)$ は，(3.12) と同じように

$$A^\alpha(t)=\begin{cases}A(t) & \alpha=1\\ JA^\dagger(t)J & \alpha=2\end{cases}\tag{5.4}$$

を意味する。

この初期値問題の解 $A^\alpha(t)$ は，Heisenberg 表示での演算子 $A_H{}^\alpha(t)$（方程式 (3.13) をみたす）と次のような関係にある：

$$A^\alpha(t)=e^{i\hat{H}_0(t+\tau)}e^{-i\hat{H}(t+\tau)}A_H{}^\alpha(t)e^{i\hat{H}(t+\tau)}e^{-i\hat{H}_0(t+\tau)}\tag{5.5}$$

ここで，次のような演算子 $\hat{U}(t,\ t')$ を定義する：

$$\hat{U}(t,\ t')=e^{i\hat{H}_0(t+\tau)}e^{-i\hat{H}(t+\tau)}e^{i\hat{H}(t'+\tau)}e^{-i\hat{H}_0(t'+\tau)}\tag{5.6}$$

そうすると，(5.5) は

$$A_H{}^\alpha(t)=\hat{U}(-\tau,\ t)A^\alpha(t)\hat{U}(t,\ -\tau)\tag{5.7}$$

と書ける。

この演算子 $U(t,\ t')$ が次のような性質をもつことは，定義から明らかである：

$$\hat{U}(t,\ t)=1,\tag{5.8}$$

$$\hat{U}^\dagger(t,\ t')=\hat{U}(t',\ t)=\hat{U}^{-1}(t,\ t'),\tag{5.9}$$

$$\hat{U}(t_1,\ t_2)\hat{U}(t_2,\ t_3)=\hat{U}(t_1,\ t_3).\tag{5.10}$$

また，定義式 (5.6) をで微分すると，

$$i\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}(t,\ t')=\hat{H}_I(t)\hat{U}(t,\ t').\tag{5.11}$$

ただし，右辺の $\hat{H}_I(t)$ は，相互作用表示での摂動ハミルトニアン，

$$\hat{H}_I(t)=e^{i\hat{H}_0(t+\tau)}\hat{H}_Ie^{-i\hat{H}_0(t+\tau)}\tag{5.12}$$

である。(5.8) に注意して，微分方程式 (5.11) を解くと

$$\hat{U}(t,\ t')=T\exp\left[-i\int_{t'}^{t}\hat{H}_I(s)ds\right]\tag{5.13}$$

となる。ただし，右辺の T は時間順序積（T 積）を意味する。

さて，そこで，Heisenberg 表示での演算子の T 積の Φ_ρ での期待値（causal Green 関数）を，(5.7) を用いて，相互作用表示に書きかえてみよう。U の性質 (5.10) を使って，結果を整理すると，

$$\begin{aligned}&(\Phi_\rho,\ T(A_H{}^{\alpha_1}(t_1)A_H{}^{\alpha_2}(t_2)\cdots\cdots A_H{}^{\alpha_n}(t_n))\Phi_\rho)\\&=(\Phi_\rho,\ \hat{U}(-\tau,\ \tau)T(\hat{U}(\tau,\ -\tau)A^{\alpha_1}(t_1)\cdots\cdots A^{\alpha_n}(t_n))\Phi_\rho)\end{aligned}\tag{5.14}$$

と書ける（$\tau>t_i>-\tau$ を仮定した）。

右辺に現われる因子 $U(-\tau,\ \tau)$ のために，このままでは，右辺は T 積の期待値にはなっていない。前述の Keldysh の方法で[4]，反時間順序積を考えなければならなかったのも，同じ理由からである。

ところで，A と JBJ が交換する（命題 3.3）ことを考慮すると，

$$\hat{U}(t,\ t')=U(t,\ t')JU(t,\ t')J \tag{5.15}$$
$$=U(t,\ t')\tilde{U}(t,\ t')$$

と書ける。ただし，

$$U(t,\ t')=e^{iH_0(t+\tau)}e^{-iH(t+\tau)}e^{iH(t'+\tau)}e^{-iH_0(t'+\tau)} \tag{5.16}$$

この $U(t,\ t')$ は $\mathfrak{A}$ の元であるから，命題3.5により，

$$U^{\dagger}(t,\ t')\Phi_\rho=\Delta^{-1}\tilde{\Delta}\tilde{U}(t,\ t')\Phi_\rho$$
$$=\tilde{\Delta}\tilde{U}(t,\ t')\Delta^{-1}\Phi_\rho$$
$$=\tilde{\Delta}\tilde{U}(t,\ t')\tilde{\Delta}^{-1}\Phi_\rho \tag{5.17}$$

ここで，Δ^{-1} が $\tilde{\Delta}\tilde{U}$ と交換すること，および

$$\Delta^{-1}\Phi_\rho=\tilde{\Delta}^{-1}\Phi_\rho$$

を用いた。この等式は，(5.11) で $A=1$ とし，Δ^{-1} と $\tilde{\Delta}^{-1}$ が交換することに注意すれば，得られる。

さらに，(5.9) に注意すると

$$\Phi_\rho=\tilde{\Delta}U(t,\ t')\tilde{U}(t,\ t')\tilde{\Delta}^{-1}\Phi_\rho$$
$$=\tilde{\Delta}\hat{U}(t,\ t')\tilde{\Delta}^{-1}\Phi_\rho \tag{5.18}$$

が成りたつ。

したがって，$(\Phi_\rho,\ T(A_H{}^{\alpha_1}(t_1)\cdots A_H{}^{\alpha_n}(t_n))\Phi_\rho)$ のかわりに $(\Phi_\rho,\ \tilde{\Delta}^{-1}T(A_H{}^{\alpha_1}(t_1)\cdots A_H{}^{\alpha_n}(t_n))\Delta\Phi_\rho)$ を考えると，(5.14) は

$$(\Phi_\rho,\ \tilde{\Delta}^{-1}T(A_H{}^{\alpha_1}(t))\cdots A_H{}^{\alpha_n}(t_n))\tilde{\Delta}\Phi_\rho)$$
$$=(\Phi_\rho,\ \tilde{\Delta}^{-1}\hat{U}(-\tau,\ \tau)\tilde{\Delta}\tilde{\Delta}^{-1}T(\hat{U}(\tau,\ -\tau)A^{\alpha_1}(t_1)\cdots A^{\alpha_n}(t_n))\tilde{\Delta}\Phi_\rho)$$
$$=(\tilde{\Delta}\hat{U}(\tau,\ -\tau)\tilde{\Delta}^{-1}\Phi_\rho,\ \tilde{\Delta}^{-1}T(\hat{U}(\tau,\ -\tau)A^{\alpha_1}(t_1)\cdots A^{\alpha_n}(t_n))\tilde{\Delta}\Phi_\rho)$$
$$=(\Phi_\rho,\ \tilde{\Delta}^{-1}T(\hat{U}(\tau,\ -\tau)A^{\alpha_1}(t_1)\cdots A^{\alpha_n}(t_n))\tilde{\Delta}\Phi_\rho)$$

と変更される。

松本にならって[13]，

$$A^\alpha(t)_G=\tilde{\Delta}^{-1}A^\alpha(t)\tilde{\Delta} \tag{5.19}$$

という記法を導入すると，上の式は

$$(\Phi_\rho,\ T(A_H{}^{\alpha_1}(t_1)_G\cdots A_H{}^{\alpha_n}(t_n)_G)\Phi_\rho)$$
$$=(\Phi_\rho,\ T(\hat{U}(\tau,\ -\tau)_G A^{\alpha_1}(t_1)_G\cdots A^{\alpha_n}(t_n)_G)\Phi_\rho) \tag{5.20}$$

と書ける。

以下は，通常の摂動論のように，$U(\tau,\ -\tau)_G$ を $H_I(t)_G$ について展開すれば，振動の各項が T 積の期待値の形に書けて，Wick 展開が可能になる。

こうして，(5.19) で定義される $A^\alpha(t)_G$ を考えれば，causal な形で摂動論が展開できることがわかった。

§6.　おわりに

正規直交関係 (3.1) をみたす系 $\{\Phi_{m,m}\}$ によって張られる空間 $\hat{\mathfrak{H}}$ を考え，その中にベク

トル Φ_ρ を (3.9) によって定義すると，Φ_ρ による物理量の期待値は熱平均 (2.4) に一致することを示した。

また，(3.3) と (4.2) で定義される J と $\hat{\theta}$ を用いて，

$$\tilde{A}=\begin{cases} JAJ & A\text{ が Bose 型} \\ -iJAJ\hat{\theta} & A\text{ が Fermi 型} \end{cases}$$

とすると，松本が論文 (13) で列挙した公理のすべてが満たされることを示した。

さらに，(5.19) によって新しい表示 A_Q を定義すると，この表示では，摂動論の causal な形式を展開できることを示した。

以上の議論では，状態ベクトル空間 $\mathfrak{H}$ が可分であるとしたが，より一般の場合の検討や冨田－竹崎理論との関係など，議論の数学的側面の整備は今後の課題としたい。

また，Bogoliubov 変換を出発点とする梅沢たちの定式化とここでの形式の関係については，いま検討中であり，近い将来に論文にしたいと思っている。

Thermo field dynamics の提唱者である Alberta 大学の梅沢博臣教授に対し，1987年4月から8月の期間，同大学に visiting research professor として滞在する機会を与えて下さったことを感謝いたします。

本研究は明治大学科学技術研究所の重点研究の助成を受けて進めたものである。研究所長はじめ関係各位に研究の支援を感謝いたします。

参 考 文 献

1) Y. Takahashi and H. Umezawa, Coll. Phenomena **2**, 55(1975).
2) T. Matsubara, Prog. Theor. Phys. **14**, 351(1955).
3) J. Schwinger, J. Math. Phys. **2**, 407(1961).
4) L.V. Keldysh, J. Exp. Theor. Phys. (U.S.S.R.) **47**, 1515(1964) [Sov. Phys. J.E.T.P. **20**, 1018(1965)].
5) I. Ojima, Ann. of Phys. **137**, 1(1981).
6) H. Umezawa, H. Matsumoto and M. Tachiki, *Thermo Field Dynamics and Condensed States* (North-Holland Pub. Amsterdam, 1982).
7) H. Ezawa aed S. Kamfuchi ed. *Progress in Quantum Fild Theory* (North-Holland Pub. Amsterdam, 1986).
8) N.P. Landsman and Ch. G. van Weert, Phy. Rep. **145**, 141(1987).
9) T. Arimitsu and H. Umezawa, Prog. Theor. Phys. **77**, 53(1987).
10) I. Hardman, H. Umezawa and Y. Yamanaka, J. Math. Phys. **28**, 2925(1987).
11) K. Nakamura, H. Umezawa and Y. Yamanaka, Physica **A150**, 118(1988).
12) K. Nakamura, H. Umezawa and Y, Yamanaka, Physica **A152**, 29(1988).
13) H. Matsumoto, Prog. Theor. Phys. **79**, 373(1988).
14) H. Matsumoto, Prog. Theor. Phys. **80**, 51(1988).