球対称なリーマン多様体における-△u+qu=λuの解の漸近挙動

(1974. 7. 15 受理)

球対称なリーマン多様体における $-\triangle u+qu=\lambda u$ の解の漸近挙動

今 野 礼 二

Asymptotic Behavior of Solutions of the Equation $-\triangle u+qu=\lambda u$ on Spherically Symmetric Riemannian Manifolds

Reiji KONNO

Synopsis

Let M be a Riemannian manifold of the form $(r_0, \infty)\times S^{n-1}$, S^{n-1} being the $(n-1)$-sphere. We suppose that the metric of M is given by $ds^2=dr^2+\rho(r)^2ds'^2$ and we consider on M the Schrödinger-type equation $-\triangle u+qu=\lambda u$, $\lambda>0$. The aim of this paper is to find relations between growth of the solutions at ∞ and the functions ρ and q.

M を $(r_0, \infty)\times S^{n-1}$ の形のリーマン多様体とする。ただし S^{n-1} は $(n-1)$ 球をあらわす。M の点を (r, ω), $r>r_0$, $\omega\in S^{n-1}$ としたとき，M のリーマン計量は

(1) $ds^2=dr^2+\rho(r)^2ds'^2$

で与えられるとする。ここに ds は M の線素，ds' は S^{n-1} の線素そして $\rho(r)$ は真に正値な r の C^2 級関数である。この論文において基本的な仮定として

(2) ρ は単調増加かつ発散

であるとする。単調増加である範囲は，十分遠方でということでよいが，楕円型方程式の解に対する一意接続性定理によって (r_0, ∞) で ρ が単調増加であると仮定しても結果のもつ一般性は失われない。このことは後にふたたび示す。

M 上の Laplace-Beltrami 作用素を$\triangle$と書けば，よく知られている微分幾何学の公式から，(1)によって

$$(3)\quad \triangle=\frac{1}{\rho^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(\rho^{n-1}\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{\rho^2}\Lambda .$$

が導かれる。ここにΛは S^{n-1} 上の Laplace-Beltrami 作用素をあらわす。この論文の目的は，$q(r, \omega)$ を M 上の実数値連続関数，λを正の数としたとき，方程式

(4) $-\triangle u+qu=\lambda u$

の自明でない解uが，$r\to\infty$に際してどのように増大するかを示すことである。結果を示す前につぎの記号を定義する。

$$q^*(r)=\sup_{\omega\in S^{n-1}}|q(r, \omega)|$$

さらに $\dot\rho, \ddot\rho$ はそれぞれ $d\rho/dr$, $d^2\rho/dr^2$ をあらわすものとする。

定理 1　$r\to\infty$ のとき $\dot\rho(r)/\rho(r)=o(1)$, $\ddot\rho(r)/\dot\rho(r)=o(1)$, $\rho(r)q^*(r)/\dot\rho(r)=o(1)$ を満たしているならば，（4）の恒等的には0でない解 u に対して，ある正の数 a と $R_0(\geqq r_0)$ が存在して，任意の正の数 ε および任意の $R\geqq R_0+2$ に対して

$$(5)\quad \int_{R_0}^{R} dr\int_{S^{n-1}}|u(r,\omega)|^2\rho(r)^{n-1}dr\geqq a\int_{R_0+1}^{R-1}\frac{dr}{\rho(r)^{\varepsilon}}$$

が成り立つ。□

なお $\rho^{n-1}drd\omega$ が M の体積要素にほかならないことに注意すれば，つぎの系がえられる。

系　もしもある正の数 ε が存在して，$r\to\infty$ のとき(5)の右辺が発散するならば，M で2乗可積分な(4)の解は恒等的に0なものに限る。□

定理 2　$\dot\rho/\rho\in L_2(r_0,\infty)$, $\ddot\rho/\rho\in L_1(r_0,\infty)$, $q^*\in L_1(r_0,\infty)$ かつ

$$(6)\quad \limsup_{r\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\left\{\frac{|n-1||n-3|}{4}\dot\rho/\rho+\frac{|n-1|}{2}|\ddot\rho|/\dot\rho+\rho q^*/\dot\rho\right\}<1$$

が満たされているとき，(4)の恒等的には0でない解 u に対してある正の数 a および $R_0(\geqq r_0)$ が存在して，任意の $R\geqq R_0+2$ に対し

$$(7)\quad \int_{R_0}^{R} dr\int_{S^{n-1}}|u(r,\omega)|^2\rho(r)^{n-1}d\omega\geqq a(R-R_0-2)$$

が成り立つ。□

注意 1　$\ddot\rho$ が定符号のときは，$\dot\rho/\rho\in L_2(r_0,\infty)$ および(6)から $\ddot\rho/\dot\rho\in L_1(r_0,\infty)$ がひとりでに従う。なぜなら，部分積分によって

$$\int_{r_0}^{r}\frac{\ddot\rho(s)}{\rho(s)}ds=\frac{\dot\rho(r)}{\rho(r)}-\frac{\dot\rho(r_0)}{\rho(r_0)}+\int_{r_0}^{r}\frac{\dot\rho(s)^2}{\rho(s)^2}ds$$

であり，一方(6)によって $\dot\rho(r)/\rho(r)$ は有界だから左辺は有界かつ単調となるからである。

注意 2　特にユークリッド空間すなわち $\rho(r)=r$ のとき，ρ は定理1，定理2いずれの条件をもみたしている。したがって $q^*(r)=o(r^{-1})$ であれば（$a>0$ として）

$$\int_{R_0}^{R} dr\int_{S^{n-1}}|u(r,\omega)|^2r^{n-1}d\omega\geqq aR^{1-\varepsilon}-b$$

が，$\limsup_{r\to\infty}rq^*(r)<2\sqrt{\lambda}$ かつ $q^*\in L_1(r_0,\infty)$ なら

$$\int_{R_0}^{R} dr\int_{S^{n-1}}|u(r,\omega)|^2r^{n-1}d\omega\geqq aR-b$$

がそれぞれみたされる。これは Kato〔2〕の結果の一部分でもある。

以下で定理1と定理2を同時に証明する。そのためにまず

$$(8)\quad v(r,\omega)=\rho(r)^{(n-1)/2}u(r,\omega)$$

とおくと，(4)より，$v(r,\omega)$ はつぎの方程式を満足することが容易に示される。

$$v_{rr}+\lambda v+\rho^{-2}\Lambda v+T(r)v+qv=0$$

ここに

$$(9)\quad T(r)=-\rho^{-(n-1)/2}\frac{d^2}{dr^2}(\rho^{(n-1)/2})=-\frac{(n-1)(n-3)}{4}\frac{\dot\rho^2}{\rho^2}-\frac{n-1}{2}\frac{\ddot\rho}{\rho}$$

であり，v_{rr} は $\partial^2v/\partial r^2$ をあらわす。後の都合のため，正の C^1 級関数 $\eta(r)$ を用いて方程式を

(10) $v_{rr}+(\lambda+\eta(r))v+\rho^{-2}\Lambda v+T(r)v-(\eta(r)+q)v=0$

と書いておく。

$L_2(S^{n-1})$ におけるノルムを $\| \|$, 内積を $(\ ,\ )$ であらわして, r と ω の関数 $v(r,\omega)$ を $L_2(S^{n-1})$ の中に値をとる r の関数 $v(r)=v(r,\cdot)$ とみなすこととする。方程式の係数の滑らかさからみて, $v(r)$ は C^2 級であり, $dv/dr=v_r(r,\cdot)$, $d^2v/dr^2=v_{rr}(r,\cdot)$ が成り立つ。(左辺は強微分, 右辺は偏導関数。) われわれの場合のように正の固有値に関連する問題を扱うとき, つねに鍵になるアルゴリズムは

(11) $F(r)=\|v_r\|^2+(\lambda+\eta(r))\|v\|^2+\rho(r)^{-2}(\Lambda v, v)$

という関数を考察することである。(以後 $v(r)$ と書くべきところをしばしば v と書く。) まず $\rho(r)^2F(r)$ の導関数は

$$
\begin{aligned}
(\rho^2F)^{\cdot}&=2\rho\dot\rho\{\|v_r\|^2+(\lambda+\eta)\|v\|^2+\rho^{-2}(\Lambda v, v)\}+\rho^2\{2\mathrm{Re}(v_{rr}+(\lambda+\eta)v+\rho^{-2}\Lambda v, v_r)\\
&\quad+\dot\eta\|v\|^2-2\rho^{-3}\dot\rho(\Lambda v, v)\}=2\rho\dot\rho\{\|v_r\|^2+(\lambda+\eta)\|v\|^2\}\\
&\quad+\rho^2\{-2T\,\mathrm{Re}(v, v_r)+2\,\mathrm{Re}(qv, v_r)+2\eta\,\mathrm{Re}(v, v_r)+\dot\eta\|v\|^2\}
\end{aligned}
$$

となる。ただし方程式(10)を用いた。したがってシュワルツの不等式および相加平均相乗平均の間の不等式を用いると,

$$
\begin{aligned}
(\rho^2F)^{\cdot}&\geqq 2\rho\dot\rho\{\|v_r\|^2+(\lambda+\eta)\|v\|^2\}\\
&\quad+\rho^2\left\{-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}(|T|+q^*+\eta)(\|v_r\|^2+\lambda\|v\|^2)+\dot\eta\|v\|^2\}\right\}\\
&\geqq 2\rho\dot\rho\{\|v_r\|^2+(\lambda+\eta)\|v\|^2\}\\
&\quad+\rho^2\left[-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}(|T|+q^*+\eta)\{\|v_r\|^2+(\lambda+\eta)\|v\|^2\}-\frac{1}{\lambda}|\dot\eta|\{\|v_r\|^2+(\lambda+\eta)\|v\|^2\}\right]\\
&=\rho\dot\rho\left\{2-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\rho\dot\rho^{-1}\left(|T|+q^*+\eta+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}|\dot\eta|\right)\right\}\{\|v_r\|^2+(\lambda+\eta)\|v\|^2\}
\end{aligned}
$$

を得る。ただし $\rho^{-1}=1/\rho$, $\dot\rho^{-1}=1/\dot\rho$ である。(9)から,

(12) $\rho\dot\rho^{-1}|T|\leqq\dfrac{|n-1|\cdot|n-3|}{4}\rho^{-1}\dot\rho+\dfrac{n-1}{2}\dot\rho^{-1}|\ddot\rho|$

であることに注意しておく。さて, 定理1の場合には $\eta=\dfrac{1}{3}\sqrt{\lambda}\,\varepsilon\rho^{-1}\dot\rho$ とえらぶ。(ε は定数)。

そうすると(12)から

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\rho\dot\rho^{-1}\left(|T|+q^*+\eta+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}|\dot\eta|\right)\\
&\leqq\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{|n-1|\,|n-3|}{4}\rho^{-1}\dot\rho+\frac{n-1}{2}\dot\rho^{-1}|\ddot\rho|+\rho\dot\rho^{-1}q^*\right)\\
&\quad+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3\sqrt{\lambda}}(\rho^{-1}\dot\rho+\dot\rho^{-1}|\ddot\rho|)
\end{aligned}
$$

ε を任意にえらんだ正の数であるとすれば, 定理1の仮定から, ある数 r_1 をえらんで $r\geqq r_1$ のとき第1項 $\leqq\varepsilon/3$ かつ $\rho^{-1}\dot\rho+\dot\rho^{-1}|\ddot\rho|\leqq\sqrt{\lambda}$ が成り立つようにできる。したがって $r\geqq r_1$ で

$(13)_1$ $(\rho^2F)^{\cdot}\geqq(2-\varepsilon)\rho\dot\rho\{\|v_r\|^2+(\lambda+\eta)\|v\|^2\}$

が成り立つ。なお $\rho\dot{\rho}^{-1}q^*=o(1)$ であるから $r\geqq r_1$ で

$$(14)_1\quad \eta(r)-q^*(r)=\rho^{-1}\dot{\rho}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{3}\varepsilon-\rho\dot{\rho}^{-1}q^*\right)\geqq 0$$

であるとしてよい。この式はあとで使う。

定理2の場合は $\eta(r)=0$ とおく。このときは

$$(13)_2\quad (\rho^2F)^{\cdot}\geqq\left\{2-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\rho\dot{\rho}^{-1}(|T|+q^*)\right\}\rho\dot{\rho}(\|v_r\|^2+\lambda\|v\|^2)$$

であるが，(6)から，やはりある数 r_1 が存在して，$r\geqq r_1$ で右辺の中括弧の中味が或る正の数 k 以上であるようにできる。

定理1，定理2いずれの場合でもつぎの補題が成り立つことが証明のかなめである。

補題1　ある数 $r_2\geqq r_1$ が存在して $F(r_2)>0$　　□

この補題の証明はあとにまわすことにして定理(複数)の証明を完結しよう。ρ^2F は増加であるから $r\geqq r_2$ でつねに $F(r)>0$ である。(11)と作用素 Λ の非正値性から

$$\|v_r\|^2+(\lambda+\eta)\|v\|^2\geqq F$$

であるから，定理1の場合には $(13)_1$ から $r\geqq r_2$ で

$$(15)_1\quad (\rho^2F)^{\cdot}\geqq(2-\varepsilon)\rho^{-1}\dot{\rho}(\rho^2F)$$

定理2の場合には $(13)_2$ から $r\geqq r_2$ で

$$(15)_2\quad (\rho^2F)^{\cdot}\geqq\left\{2\rho^{-1}\dot{\rho}-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}(|T|+q^*)\right\}(\rho^2F)$$

がそれぞれ成り立つ。$(15)_1$, $(15)_2$ からそれぞれ

$$(16)_1\quad F(r)\geqq\rho(r_2)^{\varepsilon}F(r_2)\rho(r)^{-\varepsilon}=a\rho(r)^{-\varepsilon},\ (a>0)$$

$$(16)'\quad F(r)\geqq F(r_2)\exp\left[-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_{r_2}^{r}(|T(s)|+q^*(s))ds\right]$$

一方，定理2の条件から $|T|+q^*$ は (r_2,∞) で可積分であるから，$(16)'$ は

$$(16)_2\quad F(r)\geqq F(r_2)\exp\left[-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_{r_2}^{\infty}(|T(s)|+q^*(s))ds\right]=a>0$$

とできる。

つぎの補題は本質的には Agmon による ([1; Lemma 2])。

補題2　正の数 γ が存在して $R\geqq r_2+2$ で

$$\int_{r_2}^{R}\|v(r)\|^2dr\geqq\gamma\int_{r_2+1}^{R-1}F(r)dr\qquad\square$$

上の補題を承認すれば定理1，2は $(16)_1$ あるいは $(16)_2$ からただちに従う。

補題1の証明　定理1の場合は $k=2-\varepsilon$，定理2の場合は $k=\inf_{r\geqq r_1}\{2-\rho(r)\dot{\rho}(r)^{-1}\times(|T(r)|+q^*(r))/\sqrt{\lambda}\}$ とおけば，$(13)_1$ および $(13)_2$ から，いずれの場合も

$$(17)_{1,2}\qquad (\rho^2F)^{\cdot}\geqq\lambda k\rho\dot{\rho}\|v\|^2\geqq 0$$

が成り立つ。背理法によって補題を証明するために，$r\geqq r_1$ でつねに $F(r)\leqq 0$ と仮定しよう。$(17)_{1,2}$ から

$$-\rho(r)^2F(r)\geqq-\rho(t)^2F(t)+\lambda k\int_r^t \rho(s)\dot\rho(s)\|v(s)\|^2ds$$

$$\geqq\lambda k\int_r^t \rho(s)\dot\rho(s)\|v(s)\|^2ds$$

ここで $t\to\infty$ のときを考えると，右辺は単調増加，かつ（t によらない）左辺でおさえられているから

$$(18)_{1,2}\qquad -\rho(r)^2F(r)\geqq\lambda k\int_r^\infty \rho(s)\dot\rho(s)\|v(s)\|^2ds$$

が，右辺の積分が有限であることと共に示された。$\rho(r)$ は単調増加であるから，$(18)_{1,2}$ から

$$(19)_{1,2}\qquad -F(r)\geqq\lambda k\int_r^\infty \rho(s)^{-1}\dot\rho(s)\|v(s)\|^2ds$$

さてここで，$r\in I$ のとき $\|v(r)\|\neq0$ であるような区間 $I\subset(r_1,\infty)$ を考える。このような区間は必らずとれる。なぜなら，もし $r\geqq r_1$ で恒等的に $v(r)=0$ だと，一意接続定理から M 全体で $u(r,\omega)=0$ となり仮定に反するからである。(前述の ρ の単調性についての注意も，このことに関連している。つまり，M の一部分で u が恒等的に 0 になるなら，実は M 全体で u が 0 になるのであるから，ρ が単調増加な範囲だけを考えてそこで(5)あるいは(7)をみたさない u は恒等的に 0 であることを示せば，もともとの M でも u は恒等的に 0 なはずである。)

さて $r\in I$ に対し

$$g(r)=\log\|v(r)\|^2$$

とおく。g の 2 階導関数は

$$\ddot g=\frac{1}{\|v\|^2}\left\{(\|v\|^2)^{\cdot\cdot}-\frac{[(\|v\|^2)^{\cdot}]^2}{\|v\|^2}\right\}=\frac{1}{\|v\|^2}\left\{2\,\mathrm{Re}(v_{rr},v)+2\|v_r\|^2-\frac{4[\mathrm{Re}(v_r,v)]^2}{\|v\|^2}\right\}$$

したがってシュワルツの不等式と方程式(10)とから

$$\ddot g\geqq\frac{2}{\|v\|^2}\{\mathrm{Re}(v_{rr},v)-\|v_r\|^2\}$$

$$=\frac{2}{\|v\|^2}\{-(\lambda+\eta)\|v\|^2-\rho^{-2}(\Lambda v,v)-\|v_r\|^2-T(r)\|v\|^2+\eta(r)\|v\|^2+(qv,v)\}$$

$$\geqq\eta(r)-q^*(r)-T(r)-\frac{2F(r)}{\|v(r)\|^2}$$

定理 1 の場合，$(14)_1$ および $(19)_{1,2}$ を考慮すれば

$$\ddot g(r)\geqq-T(r)+2\lambda k\int_r^\infty \rho(s)^{-1}\dot\rho(s)\exp\{g(s)-g(r)\}ds$$

を得る。ところでこのとき

$$-\int_{r_0}^r T(s)ds$$

は r の関数として下に有界である。これは $\alpha=(n-1)/2$ とおくと(9)により

$$-\int_{r_0}^r T(s)ds=\int_{r_0}^r \rho(s)^{-\alpha}\frac{d^2}{ds^2}(\rho(s)^\alpha)ds=\alpha\rho(r)^{-1}\dot\rho(r)-\alpha\rho(r_0)^{-1}\dot\rho(r_0)$$

$$+\alpha^2\int_{r_0}^r \rho(s)^{-2}\dot\rho(s)^2ds$$

であって最後の辺の第1項が仮定により有界だからである。したがって I の任意の点 r_3 を固定すれば，$K>0$ が存在して $r_3<t$ なかぎり

$$\dot{g}(t) \geqq \dot{g}(r_3) - \int_{r_3}^{t} T(r)dr + 2\lambda k \int_{r_3}^{t} dr \int_{r}^{\infty} \rho(s)^{-1}\dot{\rho}(s) \exp\{g(s)-g(r)\}\, ds$$

ゆえに

$$(20)_{1,(2)} \qquad \dot{g}(t) \geqq -K + 2\lambda k \int_{r_3}^{t} dr \int_{r}^{\infty} \rho(s)^{-1}\dot{\rho}(s) \exp\{g(s)-g(r)\}\, ds$$

となる。

定理2の場合は $\eta(r)=0$ であったから

$$\ddot{g}(r) \geqq -T(r) - q^*(r) + 2\lambda k \int_{r}^{\infty} \rho(s)^{-1}\dot{\rho}(s) \exp\{g(s)-g(r)\}\, ds$$

であるが，条件より T も q^* も (r_0, ∞) で可積分であるから上式を積分してやはり $(20)_{1,(2)}$ が成立する。$(20)_{1,(2)}$ から特に（右辺第2項を落として）

$$(21)_{1,2} \qquad g(s) - g(r) \geqq -K(s-r)$$

が $r, s \in I$, $r_3 \leqq r < s$ に対して成り立つが，このことはまた，$\|v(r)\|^2 = e^{g(r)}$ が I の有限な端点（もしあれば）で0になりえないことをもあらわしている。したがって実は (r_1, ∞) で $\|v(r)\| \neq 0$ であって，$(21)_{1,2}$ も (r_1, ∞) で成立する。$(21)_{1,2}$ を $(20)_{1,(2)}$ に代入すれば $r_3 \leqq t$ で

$$\dot{g}(t) \geqq -K + 2\lambda k \int_{r_3}^{t} dr \int_{r}^{\infty} \rho(s)^{-1}\dot{\rho}(s) e^{-K(s-r)}\, ds$$

右辺は $t \to \infty$ のとき発散する。なぜなら

$$\int_{r_3}^{\infty} dr \int_{r}^{\infty} \rho(s)^{-1}\dot{\rho}(s) e^{-K(s-r)}\, ds = \int_{r_3}^{\infty} ds \int_{r_3}^{s} \rho(s)^{-1}\dot{\rho}(s) e^{-K(s-r)}\, dr$$
$$= \frac{1}{K} \int_{r_3}^{\infty} \rho(s)^{-1}\dot{\rho}(s)(1-e^{-K(s-r_3)})\, ds \geqq \frac{1}{K}(1-e^{-K}) \int_{r_3+1}^{\infty} \rho(s)^{-1}\dot{\rho}(s)\, ds$$
$$= \infty$$

だからである。したがって $\dot{g}(t) \to \infty\ (t \to \infty)$ であるが，このことは $\|v(r)\|^2$ が単調に発散することを意味する。しかしこれは$(18)_{1,2}$の右辺が有限であることと矛盾するから，補題1が証明された。

補題2の証明　本質的なことは Agmon〔1〕に示されているとおりであるが，問題の設定が〔1〕におけるのとはやや異なるので，あらためて証明を与えておく。

$\zeta_R(r)$ を，$r_0 \leqq r < \infty$ で定義された C^2 級関数で，$r_2 \leqq r < \infty$ では $0 \leqq \zeta_R(r) \leqq 1$；$r_2+1 \leqq r \leqq R-1$ では $\zeta_R(r) \equiv 1$；$r_0 \leqq r \leqq r_2$ および $R \leqq r < \infty$ では $\zeta_R(r) \equiv 0$ であるとする。しかも R に無関係な定数 m があって

$$\sup_{r_0 \leqq r < \infty} |\ddot{\zeta}_R(r)| \leqq m$$

であるとする。このような ζ_R が選べることは明らかである。部分積分から

$$\int_{r_1}^{R} \ddot{\zeta}_R(r) \|v(r)\|^2 dr = \int_{r_1}^{R} \zeta_R(r) \frac{d^2}{dr^2} \|v(r)\|^2 dr$$

であるが，一方(10)から

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dr^2}\|v\|^2=\|v_r\|^2-(\lambda+\eta(r))\|v\|^2-\rho(r)^{-2}(\Lambda v, v)-T(r)\|v\|^2+((\eta(r)+q)v, v)$$

だから，$\zeta_R(r)$ の性質と $(\Lambda v, v)\leqq 0$ より

$$\int_{r_2+1}^{R-1}F(r)dr=\int_{r_2+1}^{R-1}\{\|v_r\|^2+(\lambda+\eta(r))\|v\|^2+\rho(r)^{-2}(\Lambda v, v)\}\,dr$$

$$\leqq\int_{r_2}^{R}\zeta_R(r)\{\|v_r\|^2+(\lambda+\eta(r))\|v\|^2-\rho(r)^{-2}(\Lambda v, v)\}\,dr$$

$$=\int_{r_2}^{R}\frac{1}{2}\ddot{\zeta}_R(r)\|v\|^2dr+\int_{r_2}^{R}\zeta_R(r)\{2(\lambda+\eta(r))\|v\|^2+T(r)\|v\|^2-((\eta(r)+q)v, v)\}\,dr$$

$$\leqq\int_{r_2}^{R}\left\{\frac{1}{2}m+2(\lambda+\eta(r))+|T(r)|+\eta(r)+q^*(r)\right\}\|v\|^2dr$$

$\eta(r)$, $|T(r)|$, $q^*(r)$ は $r_0\leqq r<\infty$ で有界であるから，正の数 γ があって

$$\int_{r_2+1}^{R-1}F(r)dr\leqq\frac{1}{\gamma}\int_{r_2}^{R}\|v(r)\|^2dr$$

となるのは明らかである。よって補題2が証明された。

付記1　この論文は，今野〔3〕のある意味での拡張を試みたものである。しかし両者は非常に異なった内容を持っているので，すこし詳しく比較しよう。簡単のためこの論文を〔0〕と呼ぶことにする。

A.〔0〕球対称な $n(\geqq 2)$ 次元リーマン空間：〔3〕3次元ユークリッド空間に埋め込まれた2次元回転曲面かつ $q\equiv 0$。

B.〔0〕固有関数の増大度評価：〔3〕L_2 固有関数の不存在（増大度評価としては，(7)の右辺を $\rho(r)^{-1}$ の積分で置き換えたものしか得られない)。

C.〔0〕$\dot{\rho}$, $\ddot{\rho}$ に条件が付く：〔3〕ρ が単調増加かつ発散（な C^2 級）であればよい。ρ の意味は〔0〕と同じ。

Aの〔3〕において $n=2$ ということは本質的で，$n\geqq 3$ ではCが成り立たない。かえって〔0〕より悪くなる。(なぜ $n=2$ が特別なのか，残念ながらその深い意味は不明であるが，とにかく方法上からそうなる。) Cをみればわかるように，$n=2$ での L_2 解の不存在ということだけに限れば〔3〕のほうがずっとよい結果を与えている。なお，曲面であるかリーマン空間であるかはたいした違いではなく，ただ単に $\dot{\rho}(r)\leqq 1$ が成り立つかそうでないかだけのことである。〔0〕と〔3〕のアルゴリズムはほとんど同じであるが，技巧上のわずかな違いが結果に本質的な相異をもたらしている。

付記2　増田〔4〕は，主部に変数係数をもつ一般の2階楕円型問題（連立の場合さえも）を扱うことのできるすぐれた研究である。そのアルゴリズムはわれわれのものと近いが，補題2に相当するものの証明方法が異なる。定理1は〔4〕の結果の応用としてほとんど直ちに得られるが，定理2はわれわれの場合のほうがより直接に得られるようである。

文　　　献

1) Agmon, S.: Lower bounds for solutions of Schrödinger equations, J. d'Anal. Math., **23** (1970), 1-25.

2) Kato, T.: Growth properties of solutions of the reduced wave equation with a variable coefficient, Comm. Pure Apple. Math., **12** (1959), 403-425.

3) 今野礼二；回転面上のラプラス・ベルトラミ作用素の固有関数の評価，明大技研紀要 No. 11 (1972), 65-71.

4) 増田久弥；Schrödinger 型作用素の正の固有値と一意接続定理，関数解析的方法による偏微分方程式論の研究，数理研講究録 (1972).