回転面上のラプラス・ベルトラミ作用素の固有関数の評価

回転面上のラプラス・ベルトラミ作用素の固有関数の評価

今　野　礼　二

Estimate for eigenfunctions of the Laplace-Beltrami operators on surfaces of revolution

Reiji KONNO

Synopsis

An estimate of growth order of the solutions of $\Delta u+\lambda u=0$ is studied, where Δ is the Laplace-Beltrami operator on a surface of revolution M and λ is a positive constant. Let $M=\{(t,\ \rho(t)\omega)|t_0<t<\infty,\ \omega\epsilon S^1\}$. Our result is that if ρ is a C^2-function which is non-decreasing and divergent to ∞, then $u(t,\omega)$ satisfies

$$\int_{S^1}\left\{\rho^2|u|^2+\rho^2\left[1+\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2\right]^{-1}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2\right\}d\omega\geqq a>0$$

for sufficiently large t, unless $u\equiv 0$. This result implies the non-existence of L_2-solutions of $\Delta u+\lambda u=0$.

§ 0.　n 次元のラプラス作用素 $\Delta=\partial^2/\partial x_1{}^2+\cdots+\partial^2/\partial x_n{}^2$ は全空間で2乗可積分な固有関数をもたない。固有値の符号に制限をつければ，このことは外部領域についても成り立つ。すなわちΩは補集合が有界であるような $\boldsymbol{R}^n$ の領域，λは正の定数とすれば，Ωで方程式

$$\Delta u+\lambda u=0$$

を満たし，かつΩ上で2乗可積分であるような関数uは恒等的に0なもの以外には存在しない。以上のことは1943年，F. Rellich[10] によって発見された著名な結果のひとつである。この結果を種々の方向に拡張する試みが数多くなされた。Δのかわりにシュレーディンガー作用素 $\Delta-q$ をとった場合 (Kato[4], Weidmann[12),13)], Agmon[1),2)])， さらに一般の2階対称楕円型作用素をとった場合 (Roze[11], Ikebe-Uchiyama[3], Masuda[9])，あるいはまたΩの補集合が有界でない場合 (Konno[5),8)]) 等である。一方また，境界条件つきの作用素についても研究されている。このときは上にあげた，境界条件なしの場合に較べて，領域の広さに関する制限は弱められるが境界の形状についての新たな要求が加わるであろう。後者の型の問題もやはり Rellich によって最初に研究され，Agmon[1]，Konno[6,7] 等によって拡張された。

同様のことを多様体上で扱うことができる。のみならず，たとえばリーマン多様体上のラプ

ラス・ベルトラミ作用素が負の固有値に対応する L_2-固有関数を持つか否かということは，多様体の（というよりはむしろリーマン計量の）ある種の基本的性質を記述しているように思われる。不幸にしてこのような方向への決定的な結果は得られていないが，特殊な場合については，本論文の目的であるところの，つぎのような結果が得られる。

M を $\boldsymbol{R}^3$ 内の回転面

$$M=\{(t,\rho(t)\omega|t_0<t<\infty,\omega\in S^1\}$$

とする。ただし S^1 は 単位円周，$\rho(t)$ は真に正値な C^2 級関数である。M に $\boldsymbol{R}^3$ の超曲面としての自然なリーマン計量を導入し，M を C^2 級のリーマン多様体とみなす。

定　理　$\rho(t)$ は単調非減少かつ $t\to\infty$ で $\rho(t)\to\infty$ とする。正の定数 λ およびラプラス・ベルトラミ作用素 Δ に対して M 上で方程式

$$\Delta u+\lambda u=0$$

を満たす C^∞ 級の関数 $u=u(t,\omega)$ がもし恒等的に 0 でないならば，正の定数 a および $t_1\geq t_0$ が存在して，評価式

$$\int_{S^1}\left\{\rho(t)^2|u(t,\omega)|^2+\frac{\rho(t)^2}{1+\dot{\rho}(t)^2}\left|\frac{\partial u(t,\omega)}{\partial t}\right|^2\right\}d\omega\geqq a$$

がすべての $t\geqq t_1$ に対して成り立つ。ここに $\dot{\rho}(t)=d\rho/dt$ である。

系 1　$\lambda>0$ であるならば，M で

$$\Delta u+\lambda u=0$$

を満たし，かつ 2 乗可積分であるような関数 u は恒等的に 0 であるものにかぎる。

系 2　M の閉包 $\overline{M}$ からコンパクト集合を除くことによって得られる M の部分領域を Ω としたとき，$L_2(\Omega)$ における Δ の非正値な自己共役実現は固有値をもたない。

§ 1.　M の線素を ds，S^1 の線素を ds' とすれば，

$$\begin{aligned}ds^2&=dt^2+|d(\rho\omega)|^2\\&=dt^2+d\rho^2+\rho^2ds'^2\\&=(1+\dot{\rho}^2)dt^2+\rho^2ds'^2\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで ω と $d\omega$ が直交することを用いた。よく知られた微分幾何学の公式から，ラプラス・ベルトラミ作用素は t，ω に関して

$$\Delta=\frac{1}{\rho\sqrt{1+\dot{\rho}^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho}{\sqrt{1+\dot{\rho}^2}}\frac{\partial}{\partial t}\right)+\frac{\sqrt{1+\dot{\rho}^2}}{\rho}\Lambda\right\}$$

と表現される。ただし Λ は $\partial^2/\partial\omega^2$ のこととする。

t のかわりに新らしい変数 τ をつぎのように導入する。

$$\tau=\int_{t_0}^{t}\frac{\sqrt{1+\dot{\rho}(s)^2}}{\rho(s)}ds$$

t が t_0 から∞まで変化するとき，τ は 0 から∞まで変化する。なぜなら $d\tau/dt>0$ かつ

$$\tau \geqq \int_{t_0}^{t} \frac{\dot{\rho}(s)}{\rho(s)}\, ds = \log \rho(t) - \log \rho(t_0)$$

であり，ρ に対する仮定によってこれは $t\to\infty$ のとき∞に発散するからである。簡単な計算により，Δ は τ と ω によって

$$\Delta = \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} + \Lambda\right)$$

と表わされることがわかるから，u を τ と ω の関数とみれば

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2} + \Lambda u + \lambda\rho^2 u = 0 \cdots\cdots (1)$$

が成り立つ。

§ 2.　$L^2(S^1)$ の内積を（，），ノルムを || || であらわすことにし，u を $L_2(S^1)$ の中に値をとる τ の関数 $u=u(\tau)=u(\tau,\ \cdot)$ とみなす。

$$p(\tau) = ||u(\tau)||^2$$

および

$$F(\tau) = ||u'||^2 + (\Lambda u, u) + T(\tau)||u||^2$$

とおく。ただし $T(\tau)=\lambda\rho^2$，$u'=\partial u/\partial\tau$ である。（1）から

$$\left.\begin{aligned} F'(\tau) &= 2\mathrm{Re}(u'', u') + 2\mathrm{Re}(\Lambda u, u') \\ &\quad + 2\mathrm{Re}T(\tau)(u,u') + T'(\tau)||u||^2 \\ &= T'(\tau)||u||^2 \\ &= 2\lambda\rho(t)^2 \frac{\dot{\rho}(t)}{\sqrt{1+\dot{\rho}(t)^2}}||u||^2 \geqq 0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (2)$$

が従うから，$F(\tau)$ の符号についてはつぎの 2 つの場合のみが可能である。

1.　$\tau_1 \geqq 0$ が存在して，すべての $\tau \geqq \tau_1$ に対し

$$F(\tau) \geqq F(\tau_1) \equiv a > 0$$

2.　すべての $\tau \geqq 0$ に対し

$$F(\tau) \leqq 0$$

1. の場合，$\tau \geqq \tau_1$ に対し

$$T(\tau)||u||^2 + ||u'||^2 \geqq a + (-\Lambda u, u) \geqq a$$

すなわち，すべての $t \geqq t_1$ $(\tau(t_1)=\tau_1)$ に対し

$$\int_{S^1}\left\{\rho(t)^2|u|^2 + \frac{\rho(t)^2}{1+\dot{\rho}(t)^2}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2\right\} d\omega \geqq a$$

が成立する。

2. の場合，τ の区間 I において $p(\tau)=||u(\tau||^2>0$ であるとする。このような区間は，$u\not\equiv 0$ という仮定から，むろん存在する。$\tau\in I$ に対し

$$Q(\tau) = \log p(\tau)$$

とおけば，シュワルツの不等式を用いて

$$
\left.\begin{aligned}
Q''(\tau)&=\frac{1}{p(\tau)}\left\{p''(\tau)-\frac{p'(\tau)^2}{p(\tau)}\right\}\\
&=\frac{2}{p(\tau)}\left\{(u'',u)+||u'||^2-\frac{2[(u',u)]^2}{||u||^2}\right\}\\
&\geqq\frac{2}{p(\tau)}\left\{-(\Lambda u,u)-T||u||^2-||u'||^2\right\}\\
&=-\frac{2}{p(\tau)}F(\tau)
\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(3)
$$

したがって特に仮定から Q は I において凸である。凸関数は有限区間内で下に有界であるから，$p(\tau)=\exp Q(\tau)$ は I の閉包上においても0になりえない。すなわち，すべての $\tau\geqq 0$ に対して $p(\tau)>0$ である。したがって(3)もすべての τ について成り立ち，$Q=\log p$ は $(0,\infty)$ で凸な関数である。凸関数の性質から，

$$Q'(0)\geqq -K$$

なる正の数 K をとると，

$$Q(\sigma)-Q(\tau)\geqq -K(\sigma-\tau)$$

すなわち

$$\frac{p(\sigma)}{p(\tau)}\geqq e^{-K(\sigma-\tau)}\quad\cdots\cdots(4)$$

が τ，$\sigma\geqq 0$ に対して成り立つことに注意しよう。さて

$$\lim_{\tau\to\infty}F(\tau)=F(\infty)$$

とおけば，$F(\infty)\leqq 0$ であって

$$
\begin{aligned}
F(\tau)&=F(\infty)-\int_\tau^\infty F'(\sigma)d\sigma\\
&\leqq -\int_\tau^\infty F'(\sigma)d\sigma
\end{aligned}
$$

が成り立つ。(2)より，$F'(\sigma)=T'(\sigma)p(\sigma)$ であったから

$$-F(\tau)\geqq\int_\tau^\infty T'(\sigma)p(\sigma)d\sigma$$

これを(3)に代入すると，(4)から

$$
\begin{aligned}
Q''(\tau)&\geqq 2\int_\tau^\infty T'(\sigma)\frac{p(\sigma)}{p(\tau)}d\sigma\quad\cdots\cdots(5)\\
&\geqq 2\int_\tau^\infty T'(\sigma)e^{-K(\sigma-\tau)}d\sigma
\end{aligned}
$$

なる微分不等式が得られる。$Q'(0)\geqq -K$ であるから，(5)から（τ を η と書きかえて）

$$
\begin{aligned}
Q'(\xi)&\geqq -K+2\int_0^\xi d\eta\int_\eta^\infty T'(\sigma)e^{-K(\sigma-\eta)}d\sigma\\
&\geqq -K+2\int_0^\xi d\eta\int_\eta^\xi T'(\sigma)e^{-K\sigma}e^{K\eta}d\sigma
\end{aligned}
$$

$$= -K + 2\int_0^{\xi} d\sigma \int_0^{\sigma} T'(\sigma) e^{-K\sigma} e^{K\eta} d\eta$$

$$= -K + \frac{2}{K}\int_0^{\xi} T'(\sigma)(1-e^{-K\sigma})d\sigma$$

仮定によって $T(\tau)=\lambda\rho(t)^2\uparrow\infty$ であるから，上の不等式の最後の辺は $\xi\to\infty$ のとき正の無限大に発散する。実際，

$$\int_0^{\xi} T'(\sigma)(1-e^{-K\sigma})d\sigma$$

$$\geqq (1-e^{-K})\int_1^{\xi} T'(\sigma)d\sigma$$

$$= (1-e^{-K})(T(\xi)-T(1)) \longrightarrow \infty$$

だからである。ゆえに，適当な $\xi_0\geqq 0$ と $C_1>0$ をとれば，$\xi\geqq\xi_0$ で

$$Q'(\xi)\geqq C_1(T(\xi)-T(\xi_0))$$

とすることができる。これより

$$Q(\tau)\geqq Q(\xi_0)+C_1\int_{\xi_0}^{\tau}(T(\xi)-T(\xi_0))d\xi$$

$$\geqq C_1\int_{\tau_0}^{\tau}(T(\xi)-T(\xi_0))d\xi$$

$$\geqq C_1(T(\tau_1)-T(\xi_0))(\tau-\tau_1)$$

が $\tau\geqq\tau_1$ に対して成り立つ。($T(\tau)$ は単調増加だからである。) 以上のことから，2. の場合には適当な定数 $\tau_1\geqq 0$ と $C>0$ をとれば，$\tau\geqq\tau_1$ に対して

$$p(\tau)=||u(\tau)||^2\geqq e^{C(\tau-\tau_1)} \qquad \cdots\cdots(6)$$

なる評価を得る。したがってもちろん，適当な定数 $a>0$ をえらんで ($\tau(t_1)=\tau_1$ なる t_1 に対し)

$$\int_{S^1}\rho(t)^2|u(t)|^2 d\omega\geqq a, \quad t\geqq t_1$$

とすることができる。かくして定理が証明された。

§ 3.　系 1 の証明に入ろう。§ 2 の記法をそのまま踏襲する。$u\in L_2(M)$ であることは，$T||u||^2$ が $(0,\infty)$ で可積分なことと同値である。なぜなら，M の "体積" 要素は $\rho\sqrt{1+\rho^2}\,dtd\omega=\rho^2 d\tau d\omega=\dfrac{1}{\lambda}Td\tau d\omega$ であるから。ゆえにまた $p=||u||^2$ も可積分であって，$u\not\equiv 0$ であるかぎり2. の場合ではあり得ない。(6)と矛盾するからである。したがって，$\tau\geqq\tau_1$ で $F(\tau)\geqq a>0$，いいかえれば $||u'||^2+T||u||^2+(\Lambda u,u)\geqq a$ であるから，積分して

$$\int_{\tau_1}^{\tau}\{||u'||^2+T||u||^2+(\Lambda u,u)\}d\sigma\geqq a(\tau-\tau_1) \qquad \cdots\cdots(7)$$

一方，

$$p''(\tau)=2||u'||^2+2(u'',u)$$

$$=2||u'||^2-2T||u||^2-2(\Lambda u,u)$$

より

$$\int_{\tau_1}^{\tau} \{||u'||^2 - T||u||^2 - (\Lambda u, u)\} d\sigma$$

$$= \frac{1}{2} p'(\tau) - \frac{1}{2} p'(\tau_1)$$

であるから，(7)と合わせて，

$$2\int_{\tau_1}^{\tau} T||u||^2 d\sigma$$

$$\geqq a(\tau-\tau_1) + 2(-\Lambda u, u) + \frac{1}{2} p'(\tau_1) - \frac{1}{2} p'(\tau)$$

$$\geqq a(\tau-\tau_1) + \frac{1}{2} p'(\tau_1) - \frac{1}{2} p'(\tau)$$

$p \in L_1(0, \infty)$ であるから，適当な数列 $\{\tau_n\}$ で $\tau_n \to \infty$, $p'(\tau_n) \to 0$ となるものがある。このような τ_n に対し

$$2\int_{\tau_1}^{\tau_n} T||u||^2 d\sigma \geqq a(\tau_n - \tau_1) \to \infty \quad (n \to \infty)$$

となって $T||u||^2 \in L_1(0, \infty)$ に矛盾する。つまり $u \not\equiv 0$ と仮定したことがいけないのであったから，系1が示された。

系2を示すには，

$$M' = \{(t, \rho(t)\omega | t_0' < t < \infty, \omega \in S^1\}$$

なる M の部分領域 M' に Ω が含まれるように t_0' を十分大きくとっておけば，M' に対して系1が成り立つので，楕円型作用素の解に対する一意接続性定理を適用すればよい。

参 考 文 献

1) Agmon, S.; Lower bounds for solutions of Schrödinger-type equations in unbounded domains, Proc. International Conf. on Functional Analysis and Related Topics, Tokyo, 1969.

2) Agmon, S.; Lower bounds for solutions of Schrödinger equations, J. Analyse Math. **23**, 1-25 (1970).

3) Ikebe, T. and J. Uchiyama; On the asymptotic behavior of eigenfunctions of second-order elliptic operators, J. Math. Kyoto Univ. **11**, 425-448 (1971).

4) Kato, T.; Growth properties of solutions of the reduced wave equation with a variable coefficient, Comm. Pure Appl. Math. **12**, 403-425 (1959).

5) 今野礼二；一般領域における $-\Delta$ の正固有値について，明大技研紀要 No. 10, 185-193 (1971).

6) 今野礼二；シュレーディンガー作用素のスペクトルについての注意，専修自然科学紀要 No. 5, 40-42 (1972).

7) 今野礼二；第3種境界条件をもつシュレーディンガー作用素の正固有値，明大工学部研究報告（印刷中）

8) Konno, R.; Non-existence of positive eigenvalues of the Schrödinger operators in infinite domains, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA, **19**, 393—402 (1972).

9) 増田久弥；Schrödinger 型作用素の正の固有値と一意接続定理，数理研シンポジウム「位相解析的方法による偏微分方程式論の研究」における招待講演，1972年1月。

10) Rellich, F.; Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von $\Delta u+\lambda u=0$ in unendlichen Gebieten, Jber. Deutsch. Math. Verein. **53**, 57–65 (1943).

11) Roze, S. N.; On the spectrum of a second-order elliptic operator, Mat. Sb. **80** (112), 195–209 (1969). (Russian)=Math. USSR Sb. **9**, 183–197. (English translation)

12) Weidmann, J.; On the continuous spectrum of Schrödinger operators, Comm. Pure Appl. Math. **19**, 107–110 (1966).

13) Weidmann, J.; The virial theorem and its application to the spectral theory of Schrödinger operators, Bull. Amer. Math. Soc. **73**, 452–459 (1967).