ベイズ回帰の ABC

加　藤　久　和*

《論文要旨》

本稿の目的は，ベイズ統計学に基づく回帰分析に関する入門的な紹介である。ベイズ統計学は 21 世紀の統計学であると言われて久しく，様々な分野で実証分析に利用されているが，しかし社会科学の分野ではベイズ統計学を適用した実証分析は多いものではない。また，ベイズ統計に基づく実証分析の手法を学ぶことについても初心者にとっての障壁は依然として高い。そこで本稿では多くの研究者・学生にとってのベイズ統計入門となることを念頭に，ベイズ回帰の考え方と実践について紹介したものである。

本稿では，最初にベイズ統計学の基本的な考え方とベイズ統計の計算では欠かせないマルコフ連鎖モンテカルロ法（MCMC）について紹介する。ベイズ統計学では事前分布と尤度関数の設定から事後分布を求めることが一連の流れになるが，一般に事後分布を解析的に解くことは難しい。そこで計算が可能なカーネル部分に着目し，カーネルにしたがう乱数を発生させて事後分布を評価する。この一連の流れがマルコフ連鎖モンテカルロ（MCMC）法であるが，本稿では初学者にもわかるように，できる限りわかりやすくこの考え方を紹介している。

ベイズ回帰では MCMC のような数値計算に依存するため，R などの統計ソフトが利用される。本稿でも R の利用の方法，とりわけベイズ統計のための brms などのパッケージを紹介して実践的な事例を紹介する。人工データを作成して各種のベイズ統計用パッケージの比較なども行っている。さらに，マクロ経済に関連したいくつかの簡単な方程式（オークン法則，フィリップス曲線）の推定や，クロスセクションデータを用いた出生率と女性労働力率の関係の推定，といった適用事例の紹介を行っている。

キーワード：ベイズ統計学，ベイズ回帰，MCMC，R，brms

* 明治大学政治経済学部専任教授

はじめに ── なぜベイズ回帰を学ぶのか？

本稿は，ベイズ統計学に基づく回帰分析に関する入門的な紹介である。すでにベイズ統計学やベイズ回帰に関する書籍，論文は多数公刊されており[(1)]，改めてこのような論稿をまとめた理由について簡単に述べておきたい。

第一は，ベイズ統計学に基づく統計分析はすでに多方面に普及し，その応用はもはや珍しいものではなくなった。しかし社会科学の分野ではベイズ統計学を適用した実証分析は多いものではない。経済学を例にとると，例えば DSGE モデルのパラメータの推定やベイジアン VAR モデル，時変 VAR モデルへの応用など専門的な研究では使われているものの，大学生などの実証分析の初心者がベイズ回帰を利用する機会は限られている。

第二は，上記の理由とやや重なるが，大学生などが独学でベイズ回帰を学ぶには多くの困難がある。確かに多くの文献やあるいはインターネット上のブログなどにベイズ回帰の解説があるものの，実際にこれを理解するにはある程度の統計学とこれを取り巻く諸分野の知識が不可欠である。その厚い壁を乗り越えるための一助となるような論稿が必要であると考える。

第三は，データ分析に関する実践的な手法を学ぶには，ベイズ回帰がとても良い学習素材になるからである。後述するように，ベイズ回帰では係数パラメータの分布を探るためにマルコフ連鎖モンテカルロ（MCMC）法による数値シミュレーションを利用するが，機械学習などのデータ分析を志向する初心者などにとって，こうした分析手法を経験することがとても役に立つからである。

以上のように，教育的見地を考慮しつつ，本稿ではベイズ回帰の考え方と実践についてできる限りわかりやすく紹介していきたい。本稿の構成は以下の通りである。最初にベイズ統計学の基本的な考え方とベイズ統計の計算で

は欠かせないマルコフ連鎖モンテカルロ法（MCMC）について紹介する。次いで，ベイズ回帰分析の基礎，とりわけ推定するパラメータの事後分布をどのように特定するか，について説明する。その後，ベイズ回帰分析では R を利用するが，その代表的なパッケージである MCMCpack と brms 等について紹介する。以上をもとに，人工的なデータを用いたベイズ回帰の実践例と，マクロ経済に関連したいくつかの簡単な方程式（オークン法則，フィリップス曲線）の推定を試みる(2)。

1. ベイズ統計学の考え方

1.1　事後分布，尤度関数，事前分布

多くの入門的な解説書では，現実に生じる二つの事象（例えばサイコロを 2 回投げたときの 1 回目と 2 回目の目の数）についての条件付き確率を紹介した後にベイズの定理を導き，その二つの事象を二つの確率変数として，また条件付き確率を確率（密度）関数に置換えて事後分布を示す，という説明手順がとられる。ベイズの定理等については統計学の入門書などに譲るとして，ここでは直接，事後分布を導くこととしたい(3)。

y を確率変数として，これがパラメータ θ による確率（密度）関数 $p(y|\theta)$ を持つとする。また実際に観測される n 個のデータを $\boldsymbol{y}=(y_1, y_2, \cdots, y_n)'$ とする，この n 個のデータが観測される同時確率は $p(\boldsymbol{y}|\theta)=\Pi_{i=1}^{n} p(y_i|\theta)$ となる。最尤法ではパラメータ θ を推定するために観測データ $\boldsymbol{y}$ を固定して，この同時確率を最大にする θ の推定値 $\hat{\theta}$ を $\hat{\theta}=\max_{\theta} p(\boldsymbol{y}|\theta)$ として求める。このとき，上記の同時確率をパラメータ θ の関数とみなしたものを尤度関数と言い，得られた推定値 $\hat{\theta}$ を最尤推定値という。

このときパラメータ θ もある分布にしたがっていると考える。この点がベイズ統計学の特徴である。事前にパラメータ θ がある確率分布にしたが

うという知識があれば $\theta \sim p(\theta)$ と表現できる。これを事前分布という。

上記でパラメータ θ がある分布にしたがう，と書いたが，ここが頻度主義と言われる伝統的な統計学とベイズ統計学との違いになる。伝統的な統計学，あるいは計量経済学において推定しようとするパラメータには“真の値”が存在し，その真の値を推定することが実証分析の目的である。古典的な線形回帰モデルでは真のパラメータの存在を前提にして，推定量の一致性が担保されているかどうかが，推定における重要な条件となる。しかし，ベイズ統計学ではそもそもパラメータに“真の値”が存在するというのではなく，パラメータ自体がある確率分布に沿って分布していると考える。ここがベイズ回帰と古典的な回帰モデルと大きく異なる点である。

より具体的にみれば，上記の尤度関数 $p(\boldsymbol{y}|\theta)$ を用いた最尤法は θ というパラメータの真の値が存在し，それを観測されたデータから推定しようという試みである。しかしベイズ統計学ではパラメータ θ の分布を，観測されたデータ $\boldsymbol{y}$ から推測しようとするものである。したがって，尤度関数におけるパラメータ θ を条件としてデータ $\boldsymbol{y}$ が得られる確率 $p(\boldsymbol{y}|\theta)$ を求めるのではなく，データ $\boldsymbol{y}$ が与えられたときのパラメータ θ の確率 $p(\theta|\boldsymbol{y})$ を求めることになる。すなわちパラメータ θ 自体が確率変数であり，このとき θ の確率分布 $p(\theta|\boldsymbol{y})$ を事後分布という。ベイズの定理から事後分布，尤度関数，事前分布の関係は(1)式として表すことができる。

$$p(\theta|\boldsymbol{y}) = \frac{p(\boldsymbol{y}|\theta)p(\theta)}{p(\boldsymbol{y})} \tag{1-1}$$

ここで右辺の分母にある $p(\boldsymbol{y})$ は周辺尤度と呼ばれる。$p(\boldsymbol{y})$ は実際にデータ $\boldsymbol{y}$ が得られる確率値（定数）であり，$p(\boldsymbol{y}) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\boldsymbol{y}|\theta)p(\theta)d\theta$ となるが，この積分を解析的に解くことは極めて難しい。なぜなら入手したデータ $\boldsymbol{y}$ が得られる確率を考えるということになるためである。さらに，この積分

の値は θ で積分しているので，もはや θ の関数ではない定数となる。一方，事後分布 $p(\theta|\boldsymbol{y})$ は確率であり，すべての θ の値の確率を合計すると 1 になるが，分母（周辺尤度）の $p(\boldsymbol{y})$ はそのための規格化定数でもある。したがって，一般的には事後分布は分母の $p(\boldsymbol{y})$ を除き，

$$p(\theta|\boldsymbol{y}) \propto p(\boldsymbol{y}|\theta)p(\theta) \qquad (1\text{–}2)$$

として使われる[(4)]。この右辺の部分を事後分布のカーネルという。

1. 2　事前分布の設定

伝統的な統計学の視点から，ベイズ統計学でもっとも懐疑的とされることは事前分布の設定にある。事前の知識あるいは主観が推測に込められ，その結果得られる事後分布が客観的なものでなくなる，という主張が散見される。一般論として，事前分布にはどのような分布を設定することも可能であり，またその事前分布のパラメータ（ベータ分布ならその成功確率や正規分布なら平均，分散など）をどう設定するかも自由であるが，これが一方でベイズ統計の恣意性として取りあげられることもある。しかしながら，パラメータ θ を確率変数として捉えるなら，何らかの確率分布を事前分布として設定することは必要であり，また（線形回帰分析では後述するように）データ数が多くなれば事前分布が事後分布に及ぼす影響の程度は小さくなる。

さらに，事前の分布を特定することができない場合やそうしたくない場合には無情報事前分布や弱情報事前分布を使うことも可能である。無情報事前分布はパラメータ θ の値がどのような値をとるかわからない場合に θ のある値が他の値と同じ確率を取るという設定を与えるものであり，一様分布や非正則分布などを選択することで，ベイズ統計の恣意性の議論に対応することもできる。弱情報事前分布は例えば正規分布 $N(0, 10^5)$ などを用いる。

こうした事前分布を巡る議論について，線形回帰分析では積極的に事前分

布を活用することも考えられる。古典的回帰モデルでは推定された回帰係数（パラメータ）の“推定値”は正規分布にしたがうと仮定されるが，しかしパラメータの自体の値には真の値が存在し，したがってパラメータの平均や分散といった概念はない。ベイズ回帰ではパラメータの事前分布を想定することで，事後分布の導出をスムースに行うことが可能になる。こうした議論は次節ですすめるが，その際，階層事前分布という考え方を取り入れることがベイズ回帰では役に立つ。

階層事前分布はベイズ回帰では欠かせない考え方である。パラメータ θ の事前分布がさらに他のパラメータ λ に依存するとき，(1-2)式の事後分布は次式のように書くことができる。

$$p(\theta|\boldsymbol{y}) \propto p(\boldsymbol{y}|\theta)p(\theta|\lambda)p(\lambda) \tag{1-3}$$

すなわち，事後分布 $p(\theta|\boldsymbol{y})$ は尤度関数と第一段事前分布 $p(\theta|\lambda)$ と第二段事前分布 $p(\lambda)$ の積に比例するということになり，第二段の事前分布のパラメータ λ も何らかの確率分布にしたがうように定式化される。

1.3　事後分布の評価と MCMC

上でも述べたように，事後分布の分母にある規格化定数の積分計算を行うことは困難であり，そのため一般的には事後分布を解析的に解くことは難しい。そこで，一般的には計算が可能なカーネル部分に着目し，パラメータ θ の事後分布にしたがう乱数を発生させて，その平均値（EAP 推定量）等を計算して θ の点推定量を得る，という手続きを行う。すなわち積分を回避して，カーネルにしたがう乱数を発生させて事後分布を評価するのである。この乱数をどのように発生させるかということが，ベイズ推定の計算では非常に重要になる。そこで用いられる手法がマルコフ連鎖モンテカルロ（MCMC）法である。MCMC 法が果たす役割は，事後分布にしたがう乱数

を生成することである。

繰り返しになるが，伝統的な統計学ではパラメータ θ が真の値としてあり，この θ に基づきデータが観測される。ベイズ統計学では状況は反対であり，データは固定され，このデータを生み出したパラメータ θ は確率変数として分布していると考える。そのため，パラメータ θ の実現値としての乱数を，θ の候補値として発生させて，θ を評価するのであるが，したがってその乱数の発生方法が重要になる。

パラメータ θ の事後分布に沿うような乱数を発生させるには，いくつかの条件がある。こうした条件を満たした上で乱数を発生させる方法の総称を MCMC という。条件についての詳細は省くが，概要は以下の通りである。第一は，発生した乱数がマルコフ連鎖となること。マルコフ連鎖とは，現時点の乱数の発生確率は一つ前の乱数の発生確率にのみ依存し，過去の履歴には依存しないというものである。第二は，発生した二つの乱数の値は，有限回のステップで相互に移りあうことができること（既約性という)。第三は，一つの乱数が発生し，その値が再び発生する可能性があるが，この回数は発生する乱数によって様々となる。この再び発生する回数を観測したときの最大公約数が 1 になること（非周期性という)。第四は，詳細釣り合い条件が満たされること。詳細釣り合い条件とは，ある乱数の値 θ と θ' があるとき，θ が実現する確率と $\theta \to \theta'$ となる（遷移）確率の積が，θ' が実現する確率と $\theta' \to \theta$ となる（遷移）確率の積が等しいという条件である[(5)]。形式的に示せば，

$$f(\theta' \mid \theta) f(\theta) = f(\theta \mid \theta') f(\theta') \qquad (1\text{–}4)$$

が成立するということである。

1.4　MCMCのアルゴリズム

MCMCによって乱数が定常分布に収束すれば，その定常分布からEAP推定量等を計算することになるが，定常分布への収束にはマルコフ連鎖という条件が必要になる。さらに乱数を発生させる手法の総称がモンテカル・シミュレーションであり，この両者からMCMCという名称が付せられている。ただし，MCMCも総称であり，これを実現するための計算上のアルゴリズムにはいくつもの種類があり，代表的なものとしてギブスサンプリング，メトロポリス・ヘイスティング法，ハミルトニアン・モンテカルロ法などがある。

各アルゴリズムの詳細は省くが，簡単に要点だけをまとめておく。メトロポリス・ヘイスティング法は，任意の乱数を発生させても(1-4)で示した詳細釣り合い条件を満たすとは限らないため，この補正を行う手法である。乱数θが得られ，次の乱数の候補θ'があるとする。このとき(1-4)式が満たされず$q(\theta'|\theta)f(\theta) < q(\theta|\theta')f(\theta')$である場合，補正係数$c, c'$を用いて$c'q(\theta'|\theta)f(\theta) = cq(\theta|\theta')f(\theta')$とした上で，[0, 1]の一様乱数$r$を生成し，$r < c'/c$であれば$\theta'$を受容するが，そうでない場合は$\theta$に留まる，といったアルゴリズムである。

ハミルトニアン・モンテカルロ（HMC）法は，メトロポリス・ヘイスティング法では提案された乱数の候補の受容率が安定しないという課題を解消するために，受容される可能性が高い値を提案するような改善を行った方法である。メトロポリス・ヘイスティング法もHMC法も一般的な事後分布の評価に用いられる方法であるが，ベイズ線形回帰ではギブスサンプリングという方法が使われることが多い。

ギブスサンプリングは，二次元以上のパラメータを持つ事後分布において，他のパラメータの値を条件としたときの条件付き分布（完全条件付き分布）が導かれる場合に使用される効率的なアルゴリズムである。d個の要素から

なるパラメータベクトルを $\boldsymbol{\theta}=(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_d)'$ とし，その初期値（$t=0$）を $\theta_1^{(0)}, \theta_2^{(0)}, \cdots, \theta_d^{(0)}$ とする。このとき，$t=t-1$ 期における $d-1$ 個の他のパラメータ $\theta_2^{(t-1)}, \cdots, \theta_d^{(t-1)}$ 及びデータ $\boldsymbol{y}$ を条件として $t=t$ 期の一番目のパラメータの乱数 $\theta_1^{(t)}$ を発生させる。次に，二番目のパラメータの乱数 $\theta_2^{(t)}$ を，$\theta_1^{(t)}$ と $d-2$ 個の残りのパラメータ $\theta_3^{(t-1)}, \cdots, \theta_d^{(t-1)}$ 及びデータ $\boldsymbol{y}$ を条件として発生させる，といった繰り返しを続けて乱数を生成するアルゴリズムである(6)。

2. ベイズ線形回帰の概要

2.1　なぜベイズ線形回帰なのか

なぜベイズ統計学の考え方を線形回帰分析に適用するのか。この点を改めて整理しておきたい。

古典的な線形回帰モデルに基づく最小二乗法（OLS）では，単一のパラメータ推定値を求める。しかしデータのサンプル数が少ない場合，このパラメータ推定値は非常に不安定でもある。ベイズ線形回帰の目的は単一のパラメータの値を得るのではなく，パラメータの分布（事後分布）を推定することにある。これによってデータのサンプル数が少ない場合にもパラメータの分布から推定値を評価することが可能になる（すなわち求めるパラメータ推定値がどの程度の範囲に散らばっているか，等である)。なお，このことはサンプル数が少ない場合でも回帰分析が効率的になることを意味するのではない。パラメータの分布を評価することは，パラメータ推定値の不確実性を定量化できるということでもある。

すでにみてきたように，ベイズ推論では事前分布を組み込むことができる。何らかのパラメータの推定値に関する予備知識があれば，それをモデルに反映させることができる。この事前分布の取り扱いは伝統的な統計学からの批

判もあるが，予備知識がなければ無情報事前分布などを設定すれば良い。ちなみに，データのサンプル数が増えるほど，事後分布における尤度関数のウエイトが高まり，EAP推定値は最尤推定値の値に近づくことになる。データのサンプル数の少なさを事前分布で補う，というようにも解釈可能である。このことは最初の直感から，データというエビデンスが増えるにしたがい，次第にモデルが改良されるという自然の流れを体現しているとも言える。

なお，ベイズ線形回帰におけるEAP推定値と古典的な線形回帰のOLS推定値との比較をしても，一般的には大きな違いはない。ただし，再度強調すべきは単一の推定値としてパラメータを解釈するのではなく，パラメータの分布から柔軟に推定値を評価できることである。この点は伝統的な統計学によるパラメータ推定値の有意性の検定とは全く異なるものであることに留意すべきである。

2.2　ベイズ線形回帰の理論的背景

推定すべき方程式を(2–1)式とする。$\boldsymbol{y}$ は $n\times1$ の被説明変数ベクトル，$\boldsymbol{X}$ は $n\times d$ の説明変数行列，$\boldsymbol{\beta}$ は $d\times1$ のパラメータベクトル，また，$\boldsymbol{\varepsilon}$ は $n\times1$ の撹乱項ベクトルである。

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{X\beta}+\boldsymbol{\varepsilon} \tag{2–1}$$

撹乱項ベクトル $\boldsymbol{\varepsilon}$ は，次のような正規分布にしたがうとする。

$$\boldsymbol{\varepsilon}\sim \boldsymbol{N}(\boldsymbol{0},\sigma^2\boldsymbol{I}_d)$$

(2–1)式において求めるパラメータは $\boldsymbol{\beta}$ と σ^2 であり，これをまとめて $\boldsymbol{\theta}$ とすれば，(1–2)式のベイズ推論を適用できる。(1–2)式を再掲すれば

$$p(\theta|\boldsymbol{y})\propto p(\boldsymbol{y}|\theta)p(\theta) \tag{1–2}$$

となるが，ここで事前分布と尤度関数をどう設定するかが鍵となる。

ベイズ線形回帰においても，事前分布や尤度関数の分布形を自由に設定することも可能であるが，しかしその場合，一般に事後分布が複雑な構造になり，MCMC などでも計算することが困難になる。そこでうまく事後分布の形状をコントロールするために，事前分布と尤度関数の分布を特定することがある。こうした関係を自然な共役分布という。自然な共役分布には事前分布が正規分布で尤度関数が正規分布であれば，事後分布も正規分布になるという組合わせ，また事前分布が逆ガンマ分布で尤度関数が正規分布であれば，事後分布は逆ガンマ分布になるという組合わせがある。ベイズ線形回帰ではこの自然な共役分布を利用する。すなわち正規分布の平均の事前分布は正規分布，また分散の事前分布を逆ガンマ分布とすれば，事後分布の平均は正規分布，分散は逆ガンマ分布にしたがう。このの自然な共役分布の特性を利用して，ベイズ線形回帰モデルのパラメータ $\boldsymbol{\beta}$ と σ^2 の分布を求めてみる。

事前分布については，$\boldsymbol{\beta}$ に関しては正規分布を仮定し，その平均は $\boldsymbol{m}$，分散は $\sigma^2\boldsymbol{V}$ とする。したがって，$\boldsymbol{\beta} \sim N(\boldsymbol{m}, \sigma^2\boldsymbol{V})$ と表すことができるが，これを実際に書き下すと(2–2)式となる。

$$f(\boldsymbol{\beta} \mid \sigma^2, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{V}) = (2\pi\sigma^2)^{-d/2} |\boldsymbol{V}|^{-d/2} \exp\left\{\frac{-1}{2\sigma^2}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{m})'\boldsymbol{V}^{-1}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{m})\right\} \qquad (2\text{–}2)$$

σ^2 に関しては $\boldsymbol{\beta}$ には依存せずパラメータ a, b を持つ逆ガンマ分布にしたがうとする。すなわち，$\sigma^2 \sim IG(a, b)$ である。

$$f(\sigma^2 \mid a, b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)}(\sigma^2)^{a-1}\exp\left\{-\frac{-b}{\sigma^2}\right\} \qquad (2\text{–}3)$$

分散 σ^2 に逆ガンマ分布を仮定する理由は，その値が常に正であるというこ

とであり，また上で述べたように尤度関数を正規分布とすれば σ^2 の事後分布もまた逆ガンマ分布となるためである。なお，事前分布のパラメータ a は分布の高さを表す形状パラメータ，b は分布の広がりを表す規模パラメータである。また，パラメータ $\boldsymbol{\beta}$ は(1-3)式にあるようにパラメータ σ^2 を階層事前分布として持つことに留意されたい。

尤度関数は(2-4)式のような正規分布を仮定する。

$$f_y(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{X},\boldsymbol{\beta},\sigma^2)=(2\pi\sigma^2)^{-n/2}\exp\left\{\frac{-1}{2\sigma^2}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})'(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})\right\} \qquad (2\text{-}4)$$

ベイズの定理を適用すると，$\boldsymbol{\beta}$ と σ^2 の事後分布のカーネルは(2-5)式になる。

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{\beta},\sigma^2|\boldsymbol{y},\boldsymbol{X}) &\propto f_y(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{X},\boldsymbol{\beta},\sigma^2)\times f(\boldsymbol{\beta}|\sigma^2,\boldsymbol{m},\boldsymbol{V})\times f(\sigma^2|a,b) \\ &\propto (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}-\frac{d}{2}+a-1}\exp\left\{-\frac{\boldsymbol{A}}{2\sigma^2}\right\} \qquad (2\text{-}5) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= (\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})'(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})+(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{m})'V^{-1}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{m})+2b \\ &= (\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Lambda}^{-1}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\mu})-\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{m}'V^{-1}\boldsymbol{m}+2b+\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} \end{aligned}$$

ただし

$\boldsymbol{\Lambda}\equiv(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+\boldsymbol{V}^{-1})^{-1}$, $\boldsymbol{\mu}\equiv(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}+\boldsymbol{V}^{-1})^{-1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}+V^{-1}\boldsymbol{m})$

である。

再掲すると

$$f(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 | \boldsymbol{y}, \boldsymbol{X})$$
$$\propto (\sigma^2)^{-d/2} \exp\left\{-\frac{(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Lambda}^{-1}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\mu})}{2\sigma^2}\right\} \times (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}+a-1}$$
$$\exp\left\{-\frac{\boldsymbol{m}'V^{-1}\boldsymbol{m}-\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\mu}+2b+\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y})}{2\sigma^2}\right\} \quad (2\text{–}6)$$

として事後分布を表すことができる（(2–6)式が事後分布のカーネル部分の掛け算となっている)。(2–6)式の前半部分を正規分布のカーネル，後半部分を逆ガンマ分布のカーネルと解釈できるので，$\boldsymbol{\beta}$ と σ^2 の事後分布は，(2–7) 式で示されるようにそれぞれ相互のパラメータを条件とした条件付き分布として表すことができる。

$$N_n(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2\boldsymbol{\Lambda}), IG(a^*, b^*)$$
$$\text{ただし，} a^* = \frac{n}{2}+a,\ b^* = b+\frac{\boldsymbol{m}'v^{-1}\boldsymbol{m}-\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y}}{2} \quad (2\text{–}7)$$

このように，自然な共役分布を仮定したことにより，二つのパラメータを条件付き分布で表現できるので，事後分布の評価（MCMC）についてはギブスサンプリングを適用することができ，EAP 推定値を求めることができる[(7)]。

3. R を用いたベイズ回帰

3.1　R を用いたベイズ推論

事後分布を求めるなど MCMC などの計算を行うには統計ソフトが欠かせない。プラットフォームとしては R の他，Python や C++，あるいは Stata や SPSS などがあるが，以下では R を使ってベイズ線形回帰を行うことを前提に，R の必要なパッケージを紹介したい。

1990年代以降，BUGSやその発展形のJAGSというベイズ推論用の言語が普及し[8]，これをWindowsで使えるWinBUGSなどのソフトがベイズ推論の統計ソフトの始まりであった。Rでは，BUGSやJAGSをパッケージとして取り入れたrbugs/rjagsがベイズ推論で使われていた。さらに2010年前後になると，ベイズ推論のパッケージとしてMCMCpackが登場し，これがRにおけるベイズモデリングの汎用的なツールとなった（Martin et al.（2011））。ただし，BUGSやJAGSではMCMCのアルゴリズムはギブスサンプリングであり，条件付き事後分布が得られるようなモデルへの適用に限定されていたなど，複雑なモデルへの対応には限りがあった。

MCMCのアルゴリズムにハミルトニアン・モンテカルロ法を採用したStanの登場は，より複雑なベイズモデリングへの適用を可能とした（ベイズ推論の計算上の核心がMCMCであるのでこの点が重要である）。StanはC++で書かれているが，このStanをRに取り込んだものがRstanである[9]。

Stanの実行にはベイズ推論を行うためのcodeをStan言語の文法で書く必要がある。もっとも簡単なものでもdataブロック，parameterブロック，modelブロックの三つのブロックで構成されるcodeを作成しなければならないが，Rstanでもこれは同様であり，Rのcode内にStanのcodeを書き下す必要がある[10]。

近年，Stanコードを自動的に生成してStanを実行するRのパッケージが登場した。これにより直接Stanのcodeを書く必要がなくなったのであるが，こうしたパッケージがbrmsでありrstanarmである[11]。これによってRでMCMCを実行する垣根が大きく下がったと言える。現在ではbrmsなどのパッケージがRにおけるベイズモデリングのスタンダードになりつつある。そこで以下では，MCMCpack, brms, rstanarmの三つのパッケージを簡単に紹介し，これを用いてベイズ線形回帰の推定を行い，その結果の比較を行うこととしたい。なお，近年ではbrmsパッケージがよく使われる

ようになっており，次章以降では brms を用いて推定を行うこととしたい。

3.2　R のパッケージの概要

⑴　MCMCpack

Martin et al.（2011）によると，MCMCpack は社会科学を念頭にベイズ推論のツール，とりわけ MCMC 法を提供するものとされる。また，ベイズ推論を容易に実行できることで，ベイズ的手法を社会科学のメインストリームにすることを目的としたとも述べている。MCMCpack には 18 の統計モデルが含まれ，例えば線形回帰モデル，ロジスティックやプロビットなどの離散選択モデル，ポアソン回帰モデル等々であり，幅広い分野のモデルに対応可能である。

これらのモデルの推定は非常に容易であり，線形回帰モデルであれば MCMCregress コマンド，プロビットモデルなら MCMCprobit コマンド，ポアソン回帰モデルなら MCMCpoisson などである。ベイズ線形回帰モデルであれば

```
MCMCregress（y ～x1＋x2, data ＝データ名，burnin ＝1000,
    mcmc ＝1000, b0 ＝0, B0 ＝0, c0 ＝0.001, d0 ＝0.001）
```

が基本の code とデフォルトのパラメータになる。また，MCMC の計算にはギブスサンプラーが用いられる。

ベイズ線形回帰では事前分布では正規分布を仮定し，その分散については逆ガンマ分布を仮定している。パラメータは以下の通りであり，説明変数の係数については弱情報事前分布を想定していると言える。すなわち，$\beta \sim N(b_0, B_0^{-1}), \sigma^2 \sim IG\left(\frac{c_0}{2}, \frac{d_0}{2}\right)$ である。各要素は以下の通りである。

burnin ：バーンイン[12]の回数

mcmc ：バーンイン後の MCMC でサンプルを得る回数

b_0 ：β の事前分布の平均

B_0 ：β の事前分布の precision（正確度，分散の逆数）。デフォルトは 0 であり，すなわち分散が無限大の一様分布となる。

c_0 ：逆ガンマ分布のシェイプ・パラメータ

d_0 ：逆ガンマ分布のスケール・パラメータ

⑵　brms

brms パッケージは C++ で書かれたベイジアンモデリングのパッケージである Stan を R で実現するためのものであり，一般化線型モデルを中核とするツールを提供するものである。なお，brms は R でしばしば使われる一般化線型モデルのパッケージである lme4 に準拠し，lme4 が提供する各種モデル（線型モデル，一般化線型モデル，非線形モデル）に対応する関数が備わっている。

brms の主要な関数は brm であり，これに線形回帰モデル等を記述すればベイズ推定を行ってくれる。Stan では上述したように data，parameter，model 等のブロックを記述しなければならないが，brm はこのコードを自動的に作成するので効率的にモデルの推定ができる。推定の概要については summary などで取得でき，また bayesplot パッケージ（brms パッケージをインストールすると同時に利用可能になる）を介して MCMC の過程等のプロットを示すことができる。

線形回帰モデルのコードの基本は以下のようである。

brm（formula：モデル式（ex.y ～x1＋x2＋x3），data ＝データ名，
chains ＝4，iter ＝2000，warmup ＝floor（iter/2））

事前分布については柔軟な設定ができるが，デフォルトでは無情報事前分布を設定している。また，デフォルトではシミュレーション回数は 2000 回，そのうちの半分（1000 回）がウォームアップとなっており，1000 個のサンプルが得られる。加えて，一回だけの MCMC では偏りが生じるリスクがあるので，同時に数本の MCMC を行い，それを併せてサンプリングする。この回数を chain という。したがって，デフォルトでは，chain が 4 であるので 4000 個の MCMC サンプルが得られることになる。brms は，サンプリング結果の視覚化も簡単であり plot 関数で指定すればいい。

⑶ rstanarm

rstanarm は Stan をベースにした R のパッケージであり，これまでの JAGS などのパッケージよりもモデルの特定化を簡潔にしたものである。また，R に標準的に備わっている線形回帰関数 lm をベイジアン推論に拡張したものである（Muth et al.（2018）による）。

ベイズ線形回帰の事前分布は弱情報事前分布になるようにしており，正規分布を設定する場合はデフォルトの値は平均 0，標準偏差 2.5 としている。MCMC は Rstan を経由することからハミルトニアン・モンテカルロ法による。

ベイズ線形回帰モデル（ここでは一般線形回帰モデルとしているが）は，stan_glm コマンドで計算される。このコマンドは R における glm 関数を意識したものであり，事前分布については様々な分布の設定が可能となっている。デフォルトでは係数の平均に関しては正規分布，分散に関しては逆ガンマ分布である。

stan_glm（y ～x1＋x2＋x3, data ＝データ名，iter ＝10000, chains ＝1）

rstanarm の特徴は，より広範なモデルへ適用できることであろう。

3.3　ベイズ線形回帰の実例 ── 三つのパッケージの比較

上記の R のパッケージを用いて，ベイズ推計の例を示す[(13)]。

最初に R の乱数作成機能を利用して人工データを作成する。乱数の種は 2022 とし，1000 個の人工変数を作成する。最初に，撹乱項 ε の分散の値を逆ガンマ分布からの乱数によって特定する（この例では 7.02 とした）。次に，二つの説明変数を作成するが，x_1 は平均 3，標準偏差 1.5 にしたがう正規分布からの乱数，x_2 は平均 1，標準偏差 0.5 にしたがう正規分布からの乱数とする。撹乱項に相当する部分は平均 0，標準偏差は上記の値としてこれも正規分布からの乱数を作成する。

次のステップでは，推定する方程式を作成する。被説明変数を y として

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \varepsilon$$

とする。ここで係数 β についても平均 0，標準偏差 10 の正規乱数からの値を仮定し，以上から被説明変数 y を計算する[(14)]。なお，この例では $\beta_0 = 18.1$，$\beta_1 = 10.06$，$\beta_2 = -6.86$ としている。以上の結果を用いて，ベイズ線形回帰を実行する。

表 1 は三つのパッケージを利用して推計を行った結果である。3 つのパッケージの推定結果はほぼ変わらない。また，各パラメータについてパッケージのデフォルトの結果である分位点についても計算が行われている。例えば MCMCpack の場合は β_1 の平均値は 9.945，β_2 の平均値は -6.763 であり，brms の場合は β_1 の平均値は 9.95，β_2 の平均値は -6.67 でああった。また，brms の計算結果から β_1 の 5%分位点は 9.65，95%分位点は 10.24 となっている。ちなみに，これらのパラメータ推計値の平均値と，最小二乗法（OLS）によるパラメータ推計値を比べても両者に大きな違いはない，しかしベイズ推計ではパラメータの分位点が示されていることから，（brms の

場合）β_1 の値は［9.65, 10.24］の範囲に 90％の確率で存在するという推論ができる。

図 1 は MCMCpack による推定結果のプロット（トレースとサンプリン

表 1　ベイズ線形回帰の結果の比較

⑴　**MCMCpack**

	Mean	SD	2.5%	97.5%
Intercept	−18.475	0.6543	−19.739	−17.193
X1	9.943	0.1487	9.655	10.237
X2	−6.763	0.4358	−7.629	−5.923
sigma^2	49.653	2.2356	45.451	54.252

⑵　**brms**

	Mean	SD	5%	95%
Intercept	−18.47	0.65	−19.73	−17.19
X1	9.95	0.15	9.65	10.24
X2	−6.67	0.43	−7.60	−5.92
sigma	7.06	0.16	6.76	7.38

⑶　**rstanarm**

	Mean	SD	10%	90%
Intercept	−18.5	0.7	−19.3	−17.6
X1	9.9	0.1	9.8	10.1
X2	−6.8	0.4	−7.3	−6.2
sigma	7.1	0.2	6.9	7.3

（参考）　OLS の結果

	Mean	SD
Intercept	−18.473	0.6588
X1	9.9459	0.1489
X2	−6.7673	0.4358
sigma	7.047	—

注：筆者計算，コードは付録参照。

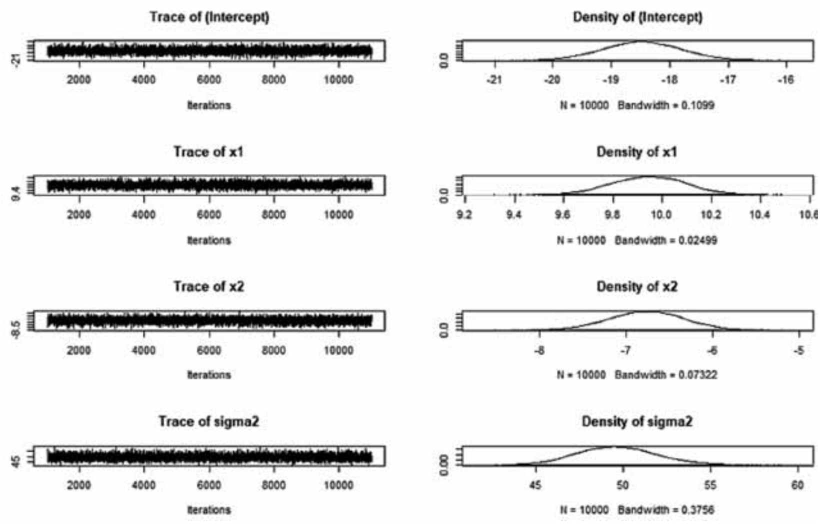


図 1　MCMCpack によるベイズ線形回帰の結果のプロット

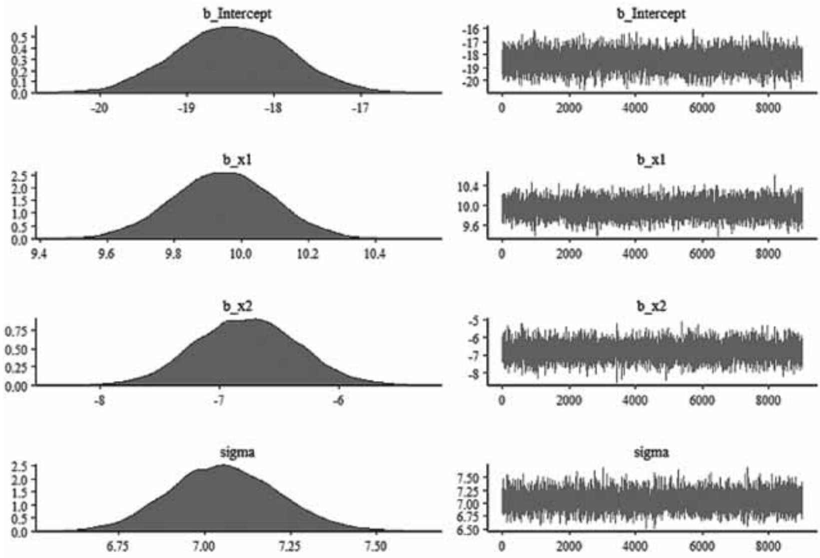


図2　brmsによるベイズ線形回帰の結果のプロット

グのヒストグラム）を示したものであり，図2は同じくbrmsの結果のプロットを示したものである。それぞれ各係数の値の追跡状況（トレース）と，サンプリングした場合のヒストグラムが描かれている。このように係数パラメータの分布を示すことができることが，まさにベイズ線形回帰の特徴である

4．ベイズ線形回帰の適用例

ベイズ線形回帰のパフォーマンスについて，いくつかの実践例を通じて示していきたい。ここでは，マクロ経済学の変数間の関係を示す代表的な二つの事例（GDP成長率と失業率の関係（いわゆるオーカンの法則）と物価上昇率と失業率の関係（短期的なフィリップス曲線），及び都道府県データを用いた出生率と女性の労働力率の関係，の併せて三事例を紹介する。当然で

あるが，以下の事例は精緻な実証分析の結果を示すことを目的としているのではなく，あくまでもベイズ線形回帰の特徴を紹介することが主眼であることを強調しておきたい。

4.1　経済成長率と失業率の関係

経済成長率と失業率の関係については，その定量的な分析を行った Okun（1962）にしたがって，オークンの法則と称されてきた。近年では，経済構造や労働市場環境の変化とともに経済成長率と失業率の間の安定的な関係を見いだすことは難しくなっているものの，両者間に負の関係があることは確認されている（加藤（2009）等参照）。そこで，この節では日本経済全体のマクロベースでの経済成長率と失業率の関係について，ベイズ線形回帰を試みて，両者の間に負の関係が見いだせるかを検証したい。

用いるデータは 1994 年第 2 四半期から 2021 年第 2 四半期までの実質経済成長率（GDPR）と完全失業率（UR）の四半期データであり，いずれも季節調整済の系列である。実質経済成長率は内閣府「四半期別 GDP 速報」から，また完全失業率は総務省統計局「労働力調査」から得ている。図 3 は両者の時系列推移を示したものである。

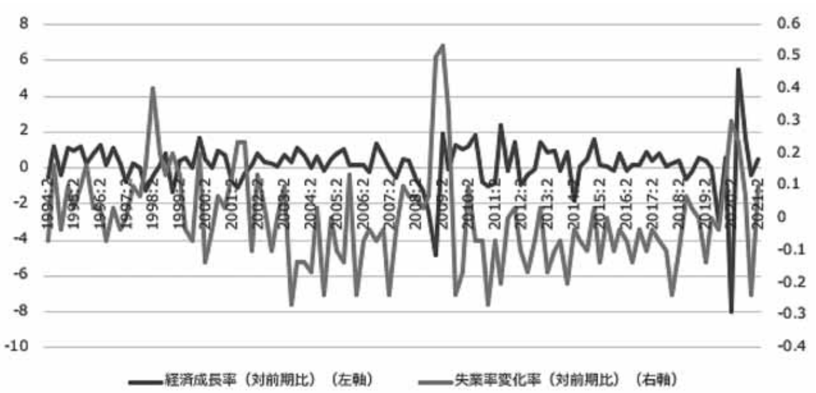
推定すべき式は(4–1)式のような簡易なものとする。その被説明変数は失業率の階差変数（$dUR_t = UR_t - UR_{t-1}$）である。

$$dUR_t = \alpha + \beta \times GDPR_t + \varepsilon_t \qquad (4\text{–}1)$$

(4–1)式を OLS で推定すると β の推定値は－0.018，標準誤差は 0.011 であり，この簡便な推計では，β に関して有意な結果を得ることはできなかった。

これをベイズ線形回帰で推計した結果を示したものが図 4 である。推定にあたっては brms パッケージを用いて，9000 回のサンプリングを行っている（10000 回のサンプリングのうち，ウォームアップが 1000 回）。図 4 から

もわかるようにβの分布はほぼ0より小さい箇所に存在している。MCMCシミュレーションの結果によれば，βの中位値は−0.02であり，90%信頼区



データ：内閣府『四半期別GDP速報』，総務省統計局『労働力調査』
注：期間は1994年第2四半期から2021年第2四半期まで。いずれも季節調整済系列である。

図3　経済成長と失業率（変化分）の推移

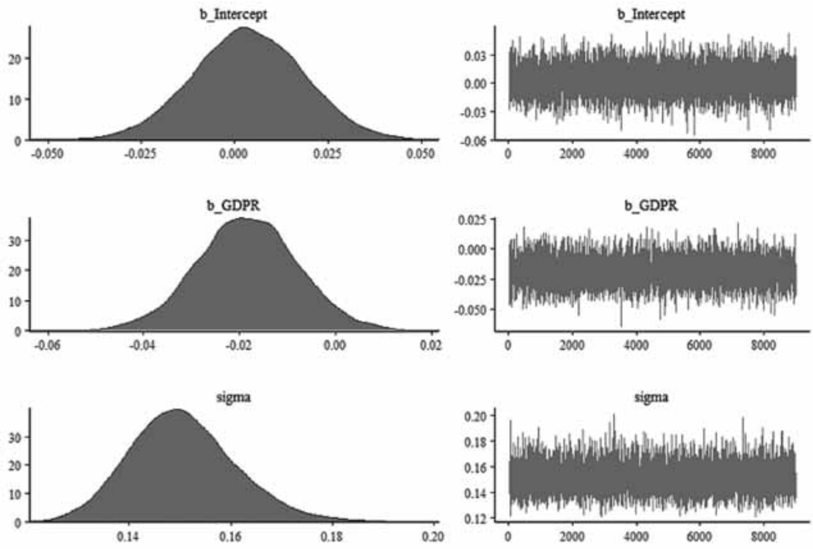


図4　brmsによるベイズ線形回帰の結果（経済成長率と失業率）

間は［−0.04, 0.00］であった。このことから類推すれば，OLS では有意な係数を得ることはできなかったが，ベイズ推計では β の値は概ねマイナスであることがみてとれる。これによって経済成長率と失業率の間には負の関係があることが推測される。

4.2　短期フィリップス曲線の推計

次に失業率とインフレ率の短期的な関係，すなわち短期のフィリップス曲線の推計を試みる。近年，日本のみならず多くの先進国では短期のフィリップス曲線の存在が疑われるようになり，また実証分析では失業率の代わりに需給ギャップを，またインフレ率や賃金上昇率には前向きのインフレ期待を考慮した，ニューケインジアン・フィリップス曲線が扱われている（原他(2020）参照)。こうした議論を承知した上で，単純な短期フィリップス曲線の推計を，通常の最小二乗法とベイズ推計で比較してみたい。

使用するデータは 2010 年 1 月から 2022 年 6 月までのサンプル数 149 の月次データであり，インフレ率は総務省統計局「消費者物価指数」における生鮮食品を除く総合指数（季節調整済）の伸び率を，失業率については総務省統計局「労働力調査」の月次における完全失業率（季節調整済）を用いた。推定すべき式は(4−2)式であり，期待される係数は $\beta<0$ となる。

$$INFL_t = \alpha + \beta \times UR_t + \varepsilon_t \qquad (4\text{−}2)$$

(4−2)式を OLS で推定すると β の推定値は −0.03, 標準誤差は 0.02 であって，$\beta=0$ という帰無仮説は棄却できなかった。以上から，単純な OLS での推測はこれが限界であり，$\beta<0$ の可能性についてはこれ以上の推論は難しい。一方，(4−2)式を，brms パッケージを用いてベイズ線形回帰した結果が図 5 にある（サンプリングの回数は 10,000 回，このうちウォームアップが 1000 回)。シミュレーションの結果から，β の中位値は −0.03 であり，

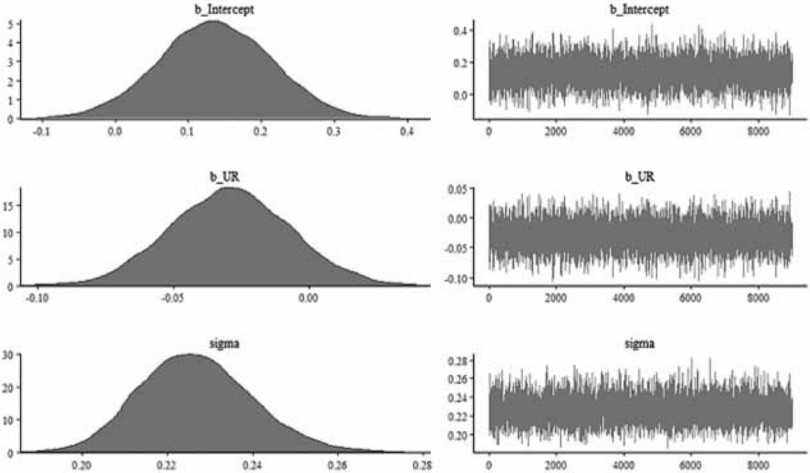


図 5　brms によるベイズ線形回帰の結果（短期フィリップス曲線）

90％信頼区間は［－0.07, 0.01］であった。90％信頼区間にはプラスの範囲も含まれているものの，多くがマイナスの範囲にあり，失業率とインフレ率の間に短期的には負の関係が推測される。

4. 3　TFR と女性労働力率の関係

クロスセクションデータを用いた推定にベイズ線形回帰を適用する。取りあげるデータは都道府県別の 20〜49 歳女性の就業率（E2049）と合計特殊出生率（TFR）の関係である。2015 年と 2020 年の間の変化分をもとに両者に正の関係が存在するかどうかを確認する。これまで都道府県別データにおいても両者には正の関係が認められてきたが（例えば加藤（2017）など），ここでは 5 年間の変化分を対象に推定を行う。使用するデータは，女性就業率は総務省統計局「国勢調査」，合計特殊出生率は厚生労働省「人口動態調査」である。推定式は(4-3)式である。

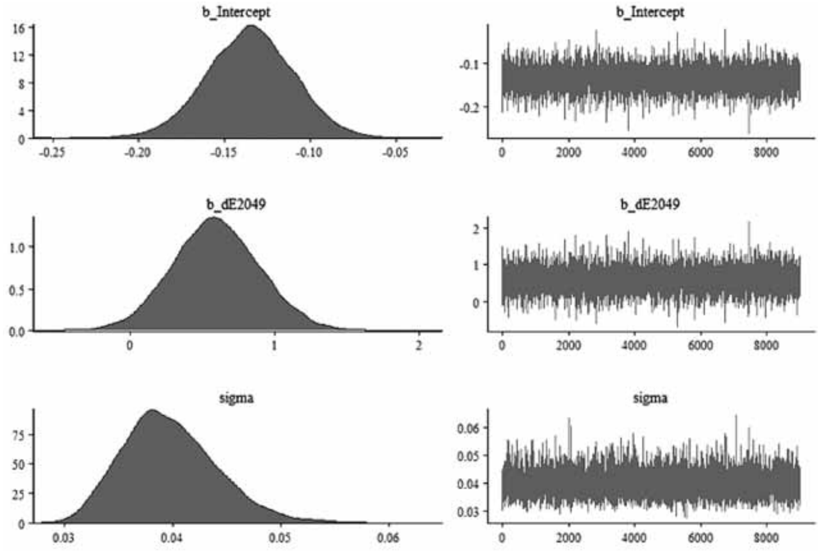


図 6　brms によるベイズ線形回帰の結果（合計特殊出生率と女性の就業率）

$$dTFR_i = \alpha + \beta \times dE2049_i + \varepsilon_i \qquad (4\text{–}3)$$

OLS での推定結果をみると，β の推定値は 0.597，また標準偏差は 0.293 で有意水準 10%で $\beta = 0$ という帰無仮説が棄却される結果となった。brms パッケージを用いて(4–3)式をベイズ線形回帰した結果が図 6 である（サンプリングの回数は 10,000 回，このうちウォームアップが 1000 回）。β の推定結果をみると中位値は 0.59 であり，90%信頼区間は［0.00, 1.20］であり，ほとんどの推計値がプラスの範囲に分布していることがわかる。このことからベイズ線形回帰によって両者の間には正の関係があると考えられる。

お わ り に

ベイズ統計学は 21 世紀の統計学であると言われて久しい。この間，ベイ

ズ統計学の入門書・研究書は多数出版され，また R など統計ソフトにおける分析用コードなども広く公開されている。しかしながら，一般にベイズ統計学への距離が縮まったかと問われれば，依然としてその距離はあるように感じられる。なぜベイズ統計を用いなければならないのか，それによって伝統的な統計的推論と比べてメリットはあるのか，など基本的な疑問を持つ者も多い。ベイズ統計学に近づくには，まずは具体的にベイズ統計に関連する統計処理を経験してみることが早道であろう。その題材としてベイズ回帰は最良の素材ではないだろうか。

本稿は，冒頭でも述べたように多くの研究者・学生にとってのベイズ統計入門となることを念頭に，ベイズ回帰の考え方と実践について紹介したものである。理論的側面も紹介したが，実際に手に取って分析ができるように R におけるパッケージの紹介や，これを用いたいくつかの（簡単ではあるが）応用的な適用例も紹介している。さらに多くの研究者・学生がベイズ統計を利用する一助になれば幸いである。

《注》

（1）　やや古い文献であるが，和合（1998）がほぼすべてをカバーしている。しかし内容は簡単ではない。

（2）　ここではオークン法則等を構造的に解明することが目的ではないので，マクロ経済学のテキストブックにあるようなシンプルな方程式を仮定して推定を行う。

（3）　本稿は入門的な論考と位置づけているが，ここから解説するには紙幅が限られている。例えば照井（2010）など参照されたい。

（4）　事後分布から求めるものはパラメータ θ のある値の確率 $p(\theta|\boldsymbol{y})$ の大きさではなく，パラメータ θ の平均値や分位点などであるので，問題にならない。

（5）　これらの点については，小西他（2008），豊田（2015），花田・松浦（2020）などがわかりやすい。

（6）　アルゴリズムの初歩的な詳細については花田・松浦（2020）や Gelman et. al（2014）等参照されたい。

（7） (2-2)式以下の導出については Ali. et al.（2019）を参照した。

（8） BUGS は Bayesian inference Using Gibbs Sampling, JAGS は Just Another Gibbs Sampler の略。

（9） R 以外にも Python に取り込んだ Pystan，Julia に取り込んだ Stan. jl, Stata に取り込んだ StataStan 等がある。

（10） 初歩的な入門書として馬場（2019）等がある。

（11） これ以外にも bayesplot, loo, shinystan などがある。

（12） MCMC では初期値の影響を排除するため，シミュレーション結果のうち初期の分を廃棄して，残りの部でサンプリングする。ギブスサンプリングではこの初期値の影響を棄却する部分をバーンイン（burnin）というが，Stan ではこれをウォームアップ（warmup）と読んでいる。

（13） 詳細なコードについては付録参照。

（14） ベイズ推論の基本としてパラメータ自体も確率変数であるとしていることから，このような手順を採用している。伝統的な統計学であれば β を固定してシミュレーションを行うことになる。

参考文献

Ali, A., Inglis, A., Prado, E., and Wundervald, B. (2019), “Bayesian Linear Regression,”, https://brunaw.com/phd/bayes-regression/report.pdf.（2022 年 10 月 8 日確認）

Bürkner, P. C. (2017), “brms: An R Package for Bayesian Multilevel Models Using Stan,” *Journal of Statistical Software,* Vol. 80, Issue 1.

Gelman, A., Carlin J., Stern H., Dunson D., Vehtari A., and Rubin D. (2014), *Bayesian Data Analysis,* Third Edition, CRC Press.

Martin, A. D., Quinn K.M., and Park J. H. (2011), “MCMCpack: Markov Chain Monte Carlo in R,” *Journal of Statistical Software,* Vol. 42, Issue 9.

Muth, C., Oravecz, Z., and Gabry, J. (2018), “User-friendly Bayesian regression modeling: A tutorial with rstanarm and shinystan,” *The Quantitative Methods for Psychology,* Vol. 14, No. 2, pp. 99–119.

Okun, Arthur M., (1962), “Potential GNP, its measurement and significance,” in Proceedings of the Business and Economics Statistic Section, American Statistical Association, pp. 98–104.

加藤久和（2009），「景気変動が失業率に及ぼす影響 ―― わが国におけるオークン法則の検証 ――」，政経論叢第 77 巻第 5・6 号（明治大学政治経済研究所），pp.

263-290.
加藤久和（2017），「市区町村別にみた出生率格差とその要因に関する分析」，フィナンシャル・レビュー，通巻第 131 号，財務総合政策研究所，pp. 6-23.
小西貞則，越智義道，大森裕浩（2008），『ブートストラップ・EM アルゴリズム・MCMC』，朝倉書店。
照井伸彦（2010），『R によるベイズ統計分析』，朝倉書店。
豊田秀樹編著（2015），『基礎からのベイズ統計学』，朝倉書店。
花田政範，松浦壮（2020），『ゼロからできる MCMC』，講談社。
馬場真哉（2019），『R と Stan ではじめるベイズ統計モデリングによるデータ分析入門』，講談社。
原尚子，小池良司，関根敏隆（2020），「フィリップス曲線と日本銀行」，日銀レビュー，2020-J-3, 日本銀行金融研究所，https://www.boj.or.jp/research/wps_rev/rev_2020/data/rev20j03.pdf.（2022 年 10 月 8 日確認）

付録　ベイズ線形回帰に関する R コード

以下は「3.3 ベイズ線形回帰の実例 ── 三つのパッケージの比較」で用いた R コードである。

```
## データの準備 ##
set.seed（2022）
# 説明変数と撹乱項の作成　いずれも正規分布にしたがう #
# N（mu, sigma^2） #
# 最初は撹乱項の分散の作成(注)
sigma ＜－ 1/rgamma（n=1, shape=0.5, rate=1）
# 説明変数は 2 つ（x1: 平均 3，標準偏差 1.5）（x2: 平均 1，標準偏差 0.5）にしたがう
N ＜－ 1000
x1 ＜－ rnorm（n=N, mean=3, sd=1.5）
x2 ＜－ rnorm（n=N, mean=1, sd=0.5）
# 撹乱項は平均 0, 標準偏差は上記の sigma の値となる。
e ＜－ rnorm（n=N, mean=0, sd=sqrt（sigma））
# パラメータの分散
V ＜－ matrix（sigma*c（10,0,0,0,10,0,0,0,10）, ncol=3, nrow=3）
##
# パラメータの指定 #
```

```
# ここで MASS パッケージの中の関数 mvrnorm を使って，betas（パラメータの
値）を設定する。
betas <－ MASS::mvrnorm（n=1, mu=c（0,0,0), Sigma=V）
##
## 被説明変数の作成 ##
y <－ betas［1]+（betas［2］*x1)+(betas［3］*x2）+e
##
# データフレームの作成（データセット）#
data_1 <－ data.frame（y, x1, x2）
y <－ data_1［,1]
x1 <－ data_1［,2]
x2 <－ data_1［,3]
## 回帰分析　（参考として）
result1 <－ lm（y ~ x1+x2, data=data_1）
summary（result1）

#
#### ベイズ回帰の実行（1）　MCMCpack ####
library（MCMCpack）
posterior1 <－ MCMCregress（y ~ x1+x2, data = data_1, burnin = 1000,
                           mcmc = 10000, b0 = 0.0, B0 = 0, c0 = 2, d0 = 0.001,
                           verbose = 1000）
plot（posterior1）
summary（posterior1）
#
#### ベイズ回帰の実行（2）　brms ####
library（brms）
fit <－ brm（y ~ x1 + x2, data = data_1, iter = 10000, warmup = 1000, chain = 1）
# generate a summary of the results
summary（fit）
plot（fit, ask = FALSE）
#
#### ベイズ回帰の実行（3）　rstanarm ####
#
library（rstanarm）
```

```
fit_1 <- stan_glm (y ~ x1+x2, iter=10000, warmup=1000, data = data_1)
summary (fit_1)
#
```

（注）以下，R を実行するたびに（乱数の種（seed）を固定しても），異なる乱数が生成されるので再現性を確保するために sigma_1，x1_1，x1_2 などを経由してデータを準備する。